

AdS/CFT と DIS および multi-parton 振幅

植松恒夫¹
京大理

弦理論と QCD との関連で最近の 2 つのトピックス: (1) AdS/CFT 対応 (弦/ゲージ双対性) と DIS, (2) QCD での multi-particle 振幅の新たな計算法について述べる。

1 はじめに

研究会のタイトルの「ハドロン物理と超弦理論の再会」に因んで、この talk では QCD と弦理論との関連で最近の 2 つのトピックスを扱うことにする。1 つ目のテーマは、AdS/CFT 対応 (弦/ゲージ双対性) と深非弾性散乱で、String 理論でゲージ理論の hard behavior すなわち、エネルギーについてべき的振舞いが出せるかという問題を考察する。2 番目の話は、QCD での multi-particle 振幅の新たな計算法に関して、ここ 1, 2 年にあった大きな進展について述べる。すなわち、Spinor-helicity formalism を用いた Parke-Taylor による MHV (Maximally Helicity Violating, 最大にヘリシティを破る) 振幅の公式を、non-MHV 振幅の計算に応用する方法の開発である。その一つの Cachazo-Svrcek-Witten (CSW) では MHV 振幅を off-shell の Vertex に拡張することで、non-MHV を計算する。Twistor と呼ばれる Spinor の空間での string から MHV rule が導かれる。もう一つは、Britto-Cachazo-Feng (BCF) および Britto-Cachazo-Feng-Witten (BCFW) による「On-shell recursion relations」と呼ばれる手法で、外線の運動量を複素数の値だけシフトし、因子化と解析的性質を用いて散乱振幅を求める。

2 弦理論とハドロン物理

1960 年代後半に見出されたハドロン散乱における、有限エネルギー和則 [1] を満たす共鳴状態とレッジェの双対性を体現する散乱振幅のモデルとして Veneziano 模型が登場した。その散乱振幅は

$$A(s, t) \sim \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))} \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 $\alpha(t) = \alpha' t + \alpha(0)$ は Regge trajectory。この振幅はその後 String Model で導かれることとなる。この弦理論の散乱振幅は t : 固定, $s \rightarrow \infty$ ($\theta \rightarrow 0$) で、Regge 的振る舞い

$$A(s, t) \sim s^{\alpha(t)} \quad s \rightarrow \infty \quad (t: \text{fixed}, \theta \rightarrow 0) \quad (2)$$

すなわち、これは hadron の soft-interaction を表す。一方、 θ : fixed の大角度散乱では

$$A(s, t/s: \text{fixed}) \sim e^{-\alpha' s f(\theta)} \quad (3)$$

という振る舞いをする。ここで、 $\cos \theta = 1 + 2t/(s - 4m^2)$ で、 $f(\theta)$ は Veneziano 振幅では

$$f(\theta) \approx -\sin^2 \frac{\theta}{2} \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \ln \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (4)$$

¹e-mail address: uematsu@scphys.kyoto-u.ac.jp

すなわち、4次元の平坦な時空での弦理論での大角度散乱振幅は指数関数的な振舞いを示す。一方、constituent が直接関わる QFT では大角度散乱： $A + B \rightarrow C + D$ の散乱断面積は以下のようにベキ的振舞いを示すことを、Matveev-Muradian-Tavkhelidze [5], Brodsky-Farrar [6] らは論じた。

$$\frac{d\sigma}{dt}(A + B \rightarrow C + D) \approx s^{-n+2} f(\theta) \quad (5)$$

ここで n は、この過程 $A + B \rightarrow C + D$ に関与する constituent の total の数で、 $\pi + p \rightarrow \pi + p$ では $n = 10$ 、 $p + p \rightarrow p + p$ では $n = 12$ なので、それぞれの断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{\pi p \rightarrow \pi p} \approx s^{-8} \quad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{pp \rightarrow pp} \approx s^{-10} \quad (6)$$

となり、実験と良い一致の傾向を示している。このようなベキの振る舞いを弦理論でも再現できるかが、ここでの問いである。

3 AdS/CFT 対応とハードな散乱

このようなベキ的振舞いを弦理論から出せるか否かに答えたのが Polchinski と Strassler の仕事である [7, 8]。彼らは High-energy fixed angle scattering [7] と深非弾性散乱 (deep inelastic scattering, DIS) [8] を弦理論の AdS/CFT (弦/ゲージ) 対応を用いて、5次元の AdS 空間に置かれた string で記述できることを示した。すなわち5次元の AdS (反ドジッター) 時空におかれた string を考え、これと dual な $SU(N)$ ゲージ理論のハードな過程を扱う。10次元が $AdS_5 \times S_5$ にコンパクト化したときの metric は

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 ds_X^2 \quad (7)$$

で与えられる。ここで、 x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) は4次元時空の座標、 r はそれらに垂直な5次元目の座標、 ds_X^2 はコンパクトな5次元空間 $X = S_5$ の line element, また AdS の半径 R は、string の coupling g , カラー数 N , string のスケール α' と $R^4 \sim gN\alpha'^2$ で関係付けられている。今、10次元の局所慣性系での運動量を $\tilde{p}_{\mu(10\text{dim})}$ としたとき、4次元の運動量 $p_{\mu(4\text{dim})} = -i\partial/\partial x^\mu$ との関係は

$$\tilde{p}_{\mu(10\text{dim})} = \frac{R}{r} p_{\mu(4\text{dim})} \quad (8)$$

で与えられる。よって、10次元のスケールを $\tilde{p} \sim R^{-1}$ とすると4次元のエネルギー E のスケールは

$$\tilde{p} \approx R^{-1} \Leftrightarrow E \approx \frac{r}{R^2} \quad (9)$$

となり、 r : 小(大)は4次元では低(高)エネルギーに対応する。すなわち、4次元のエネルギーは5次元の座標点に依存し、horizon $r = 0$ ではゼロで、AdS の boundary $r = \infty$ では発散する。言い換えれば、warp factor が $w(r) = r/R$ または弦の張力が $T = r^2 \tilde{T}/R^2$ で与えられる (gravitational red-shift) ということになる。

ここで、考察する large N の $SU(N)$ ゲージ理論は、 $\mathcal{N} = 4$ の Super Yang-Mills 理論ではなく、mass gap が入ってコンフォーマル不変性 (conformal invariance) が破れており、また confinement や chiral symmetry breaking のある理論である。この場合、 Λ を最も軽い glueball の状態の質量として cutoff が以下のようになる。

$$r_{\min} \equiv r_0 \approx \Lambda R^2 \quad (10)$$

したがって、warp factor は $r \rightarrow 0$ で、もはやゼロまで行かず、理論は QCD 的なものとなる。

ゲージ理論の glueball state は弦理論では closed string state に対応し、特に dilaton にあたるとすると、AdS 空間での dilaton の波動関数は

$$\Phi = e^{ipx} \psi(r, \Omega), \quad \psi(r, \Omega) \approx \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\Delta} Y(\Omega) \quad (11)$$

となる。ここで、 Δ はこの状態を生成する最低次元の operator の conformal dimension を表し、 Ω はコンパクト空間の座標で $Y(\Omega)$ はその波動関数を意味する。これより 2 体から m -体への散乱振幅は次式で与えられる。

$$\mathcal{A}(p) \approx \frac{(gN)^{1/4(\Delta-2)}}{N^m \Lambda^{m-2}} \left(\frac{\Lambda}{p} \right)^{\Delta-4} \quad (12)$$

ここで $\Delta = \sum_{i=1}^{m+2} \Delta_i$ で、この振る舞いは QCD の場合と同様で、 Δ_i は関与する粒子の constituent の数 n_i に等しい。ただし、クォークのようにスピン σ があるときは Δ を $\tau = \Delta - \sigma$ で定義される twist τ で置き換える。よって散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{dt} = s^{-2} |\mathcal{A}(p)|^2 \sim s^{2-\Delta} \quad (13)$$

となり、エネルギーについてべき的振る舞いが示される。

4 DIS と構造関数

hard な exclusive 過程でのべき的振る舞いを上で見たが、今度は hard な深非弾性散乱過程 (Deep inelastic scattering, DIS) での構造関数を、string dual の描像で考察する。すなわちゲージ理論の coupling と string の coupling の間に $g_{YM}^2 \sim g$ の関係があることに注意し、't Hooft coupling gN の大小で場合分けする。まず、 gN が小さい場合は、QCD と同じで、large q^2 でハドロンは weakly interacting parton の集まりとして振る舞う。これは演算子積展開の twist-2 の operators $\bar{\psi} \gamma_{\mu_1} D_{\mu_2} \cdots D_{\mu_n} \psi$ etc. が dominant であることを示している。一方、 gN 大では、ハドロン全体が散乱を受ける過程となり、double-trace operators $\mathcal{P}_P \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \cdots \partial_{\mu_n} \mathcal{P}_P$ が寄与する。 $x = \mathcal{O}(1)$ では supergravity の状態が、 $x = \text{small}$ では entire string が生成される。今、深非弾性散乱過程： $\ell + \mathcal{N} \rightarrow \ell' + X$ で、交換される仮想光子の運動量 q_μ 、核子の運動量を P_μ として

$$x = -q^2/2P \cdot q \quad (0 \leq x \leq 1), \quad M^2 = -P^2 \quad |q^2| \gg M^2 \quad (14)$$

非弾性散乱断面積 (散乱角 θ , $d\Omega = 2\pi \sin \theta$, $E' : \ell'$ のエネルギー) と hadron (lepton) の structure tensor $W_{\mu\nu}$ ($L_{\mu\nu}$) および構造関数 $F_1(x)$, $F_2(x)$ は

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} \approx \frac{\alpha^2}{Q^4} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \quad W_{\mu\nu} = F_1(x) \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{2x}{q^2} F_2(x) \left(P_\mu + \frac{q_\mu}{2x} \right) \left(P_\nu + \frac{q_\nu}{2x} \right) \quad (15)$$

さて、始状態のハドロンは $AdS_5 \times W$ 内の波動関数 ($y^\mu : 4$ 次元時空の座標, $\Omega : \text{コンパクト空間 } W \text{ の座標}$)

$$\Phi = e^{iP \cdot y} \psi(r, \Omega) \quad (16)$$

で記述される string state に dual で、 $\psi(r, \Omega)$ は cut-off された AdS 空間で normalizable とする。5 次元目の座標 r が $r \gg r_0$ の領域で、時空は本質的に $AdS_5 \times W$ であり、ハドロンに couple する current は W の isometry (Killing vector : v_a) に対応する。これは以下の non-normalizable の Kaluza-Klein gauge 場を励起する。

$$\delta g_{ma} = A_m(y, r) v_a(\Omega) \quad (17)$$

A_μ の境界での値は $\lim_{r \rightarrow \infty} A_\mu(y, r) = A_\mu(y)|_{4d} = n_\mu e^{iq \cdot y}$ であり, Maxwell 方程式 $D_m F^{mn} = 0$ を Lorentz-like なゲージ, $\nabla_m A^m = 0$, $i\eta^{\mu\nu} q_\mu A_\nu + R^{-4} r \partial_r (r^3 A_r) = 0$ で書くと

$$-q^2 A_\mu + r^{-4} r \partial_r (r^3 \partial_r A_\mu) = 0, \quad -q^2 A_r + R^{-4} \partial_r \{r \partial_r (r^3 A_r)\} = 0 \quad (18)$$

となり, この解は modified Bessel function $K_0(z)$, $K_1(z)$ を用いて次式で与えられる。

$$A_\mu = n_\mu e^{iq \cdot y} \frac{q R^2}{r} K_1(q R^2 / r), \quad A_r = iq \cdot n e^{iq \cdot y} \frac{R^4}{r^3} K_0(q R^2 / r) \quad (19)$$

すなわち, A_μ は r と共に増加するが, A_r は $r = 0$ から増加し $r \simeq 0.4 q R^2$ で極大, その後は単調に減少する。target として, spin 0 の dilaton を考え, 始状態/終状態を (11) 式にとる。

$$\Phi_i = \Phi_f^* \approx e^{iP \cdot y} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\Delta} Y(\Omega) \quad (20)$$

't Hooft のパラメータが $(gN)^{-1/2} \ll x < 1$ で x の値が $\mathcal{O}(1)$ のときは supergravity state, Φ_X が中間状態に現れる。相互作用は

$$i \int d^{10} x \sqrt{-g} A^m (\Phi_i \partial_m \Phi_X^* - \Phi_X^* \partial_m \Phi_i) \quad (21)$$

のように minimal の coupling で与えられる。AdS 時空で Φ_X はスカラー場に対する 5 次元の Klein-Gordon 方程式を満たし, $M^2 = \Delta(\Delta - 4)/R^2$ で

$$\Phi_X \approx e^{i(P+q) \cdot y} \frac{J_{\Delta-2}(s^{1/2} R^2 / r)}{r^2} Y(\Omega)$$

という解である。よって、始状態と中間状態の間の current の matrix element は

$$n_\mu \langle P + q, X | J^\mu(0) | P \rangle \quad (22)$$

$$\approx s^{1/4} \Lambda^{\Delta-1/2} q n_\mu \left(P^\mu + \frac{q^\mu}{2x} \right) \int_0^1 dz z^\Delta J_{\Delta-2}(s^{1/2} z) K_1(qz) \quad z = \frac{R^2}{r} \quad (23)$$

と求まる。これより, dilaton の structure functions は

$$F_1 = 0, \quad F_2 \approx \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\Delta-1} x^{\Delta-1} (1-x)^{\Delta-1} \quad (24)$$

で与えられる。同様の計算をスピン 1/2 の dilatino について行くと

$$F_2 = 2F_1 = C' \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\tau-1} x^{\tau+1} (1-x)^{\tau-2} \quad (25)$$

が得られる。ただし, $\tau = \Delta - \sigma$ 。

強結合における構造関数を x の値に応じて次の 3 つの領域に分ける。(i) $x \sim \mathcal{O}(1)$, (ii) $x \sim \mathcal{O}(1/\sqrt{gN})$, (iii) $x \sim \mathcal{O}(e^{-\sqrt{gN}})$ 。(i) では, massless supergravity state が寄与し, 構造関数は上で求めた (24) 式または (25) 式で与えられる。(ii) の領域では, string 全体が寄与し,

$$F_1 = C \frac{1}{x^2} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\Delta-1}, \quad F_2 = 2x \frac{2\Delta+3}{\Delta+2} F_1 \quad (26)$$

また, 指数関数的に小さい x の領域 (iii) では, AdS scale と同じサイズの励起された string が効き, 構造関数は

$$F_1 = C x^{-(2+\alpha'|\zeta|)/2} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\Delta-1}, \quad F_2 = 2x \frac{2\Delta+3}{\Delta+2} F_1, \quad \zeta = 4(1 - \Delta^2)/R^2 \leq 0 \quad (27)$$

で与えられる。偏極構造関数 g_1 , g_2 についても同様の解析が行える [9]。

5 multi-parton 振幅計算：最近の発展

はじめに述べたように、弦理論との関連で、QCD の multi-particle 振幅の計算方法に関して最近の 1,2 年における大きな進展を述べる。この背景には、2007 年末に稼働を開始する CERN の LHC (陽子・陽子衝突型加速器, Large Hadron Collider) での Higgs 粒子の発見、および超対称性, New Physics の探索・確立に向けて、コライダー実験での精度の高い分析が必要になり、強い相互作用の高次補正や多粒子生成の過程を研究することが急務となっている状況が存在する。特に、LHC 領域では multi-particle 生成過程が dominant となり、multi-particle amplitudes の効率のよい計算が必要となる。最近の発展は弦理論との関連で twistor-string theory からの CSW による MHV rule や BCFW の on-shell recursion relation 等の手法が開発された。以下ではこれらを概観する。

まず、gluon+gluon $\rightarrow n$ gluons 過程の n -gluon 振幅の Feynman グラフの計算の問題点としては、(i) Diagram の数が n の増加と共に非常に多くなることである [16] (表 1 参照)。(ii) Non-Abelian gauge 理論のため、相互作用が複雑で、各 diagram について、項の数が多い。(iii) kinematical な変数 (Lorentz invariants) の数が多い [16, 17, 18]。

n	2	3	4	5	6	7	8
グラフ数	4	25	220	2485	34300	5595405	10525900

表 1: Number of tree-level Feynman diagrams

6 Spinor-helicity 法と MHV 振幅

これらの問題点を克服する基本的なアイデアは、散乱振幅を momentum の積ではなく、spinor の内積で表すことにより、表式をコンパクトにすることにある。一般に massless momentum vector p_μ ($p^2 = p^\mu p_\mu = 0$) は、bi-spinor すなわち 2 成分スピノルの left-handed spinor λ_α と right-handed spinor $\tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}$ の積で表せる。

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} = p_\mu \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu = \lambda_\alpha \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \quad \sigma^\mu = (\mathbf{1}, \vec{\sigma}), \quad \vec{\sigma}: \text{Pauli matrices} \quad (28)$$

massless spinor に対する方程式: $\not{p}u(p) = 0$ ($p^2 = 0$) の chirality (helicity) $\pm$ への projection は

$$u_\pm(p) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)u(p) \equiv u_\mp(p)^C = v_\mp(p) \quad (29)$$

よって、4 成分の Dirac spinor と 2 成分の Weyl spinor の間には以下の関係がある。

$$(\lambda_i)_\alpha = [u_+(p_i)]_\alpha \quad (\tilde{\lambda}_i)_{\dot{\alpha}} = [u_-(p_i)]_{\dot{\alpha}} \quad (30)$$

散乱振幅に現れる Lorentz product: $s_{ij} = 2p_i \cdot p_j = (p_i + p_j)^2$ の代わりに spinor product を用いる。すなわち

$$\langle i j \rangle \equiv \langle \lambda_i, \lambda_j \rangle = \epsilon^{\alpha\beta} \lambda_{i\alpha} \lambda_{j\beta} \quad [i j] \equiv [\tilde{\lambda}_i, \tilde{\lambda}_j] = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \tilde{\lambda}_{i\dot{\beta}} \tilde{\lambda}_{j\dot{\alpha}} \quad (31)$$

で spinor product を定義する。ここで、 $\epsilon^{\alpha\beta}$, $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, $\epsilon_{12} = \epsilon^{21} = 1$ は Levi-Civita 記号を表す。これらは次の関係

$$\langle i i \rangle = -\langle i j \rangle \quad [j i] = -[i j] \quad \langle i i \rangle = [i i] = 0$$

を満たす。いったん spinor product が分かれば、Lorentz product は spinor product から

$$\langle i j \rangle [j i] = 2p_i \cdot p_j = (p_i + p_j)^2 = s_{ij} \quad (32)$$

のようにして構成される。spinor product は、いわば Lorentz product の“平方根”ということができる。実際

$$\langle i j \rangle = \sqrt{s_{ij}} e^{i\phi_{ij}} \quad [j i] = \sqrt{s_{ij}} e^{-i\phi_{ij}} \quad (33)$$

のように表すことが可能で、 ϕ_{ij} は phase を表す。次に、ゲージ場 (massless vector) の momentum が k_μ 、helicity が $\pm$ の偏極ベクトル (polarization vector)、 $\epsilon_\mu^\pm(k)$ は

$$\epsilon_\mu^\pm(k, q) = \pm \frac{\langle k^\pm | \gamma_\mu | q^\pm \rangle}{\sqrt{2} \langle q^\mp | k^\pm \rangle} \quad (34)$$

と書ける。ここで q は“reference momentum”と呼ばれ、massless vector $q^2 = 0$ である。 k_μ 、 q_μ と $\epsilon^\pm$ の間の内積、 $\epsilon^\pm$ 同士の内積は

$$k \cdot \epsilon^\pm(k, q) = 0, \quad q \cdot \epsilon^\pm(k, q) = 0 \quad (35)$$

$$(\epsilon_\mu^\pm)^* = \epsilon_\mu^\mp, \quad \epsilon^\pm \cdot \epsilon^\mp = -1, \quad \epsilon^\pm \cdot \epsilon^\pm = 0$$

となる。今、reference momentum を $q \rightarrow q'$ と取り替えると on-shell の gauge 変換：

$$\epsilon_\mu^+(k, q) \rightarrow \epsilon_\mu^+(k, q') = \epsilon_\mu^+(k, q) - \frac{\sqrt{2} \langle q' q \rangle}{\langle q' k \rangle \langle q k \rangle} \times k_\mu \quad (36)$$

を引き起こすことになる。

さて、 $SU(N_c)$ のゲージ理論での Color Decomposition について述べる。生成子の交換関係は

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \delta^{ab}, \quad [T^a, T^b] = i\sqrt{2} f^{abc} T^c \quad (37)$$

このとき、 n -gluon の tree レベルの振幅は以下のように“Color Decomposition”される。

$$\mathcal{A}_n^{\text{tree}} = g^{n-2} \sum_{\sigma \in S_n/Z_n} \text{Tr}(T^{a_{\sigma(1)}} \dots T^{a_{\sigma(n)}}) A_n^{\text{tree}}(\sigma(1^{h_1}), \dots, \sigma(n^{h_n})) \quad (38)$$

ここで、 $\sigma \in S_n/Z_n$ は non-cyclic な置換を表し、 $A_n^{\text{tree}}(\sigma(1^{h_1}), \dots, \sigma(n^{h_n}))$ は“partial amplitude”と呼ばれ、ゲージ不変な subset を表す。 $h_1, \dots, h_n$ は helicity を示す。この partial amplitude は以下の性質を有する。

1. gauge invariance : $A_n(1, 2, 3, \dots, n) = \text{gauge invariant}$
2. Cyclic permutation invariance : $A_n(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)) = A_n(1, 2, \dots, n) \quad \sigma \in Z_n$
3. Reflection identity : $A_n(1, 2, \dots, n) = (-1)^n A_n(n, \dots, 2, 1)$
4. Dual Ward identity : $A_n(1, 2, 3, \dots, n) + A_n(2, 1, 3, \dots, n) + \dots + A_n(2, 3, \dots, 1, n) = 0$

次に、この tree レベルの helicity 振幅については以下のことが知られている。

- 全て + のヘリシティまたは一つが − でそれ以外は + のヘリシティの amplitude はゼロ：

$$A_n^{\text{tree}}(1^\pm, 2^+, 3^+, \dots, n^+) = 0 \quad (39)$$

- 2つが − のヘリシティ（仮に i 番目と j 番目とする）で残りが全て + のヘリシティいわゆる最大にヘリシティを破る (Maximally Helicity Violating) 振幅 (MHV amplitudes) に対する Parke-Taylor の公式 [10, 11] は以下の式で与えられる。

$$A_n^{\text{tree}}(1^+, \dots, i^-, \dots, j^-, \dots, n^+) = i g^{n-2} \frac{\langle i j \rangle^4}{\langle 1 2 \rangle \langle 2 3 \rangle \dots \langle n-1 n \rangle \langle n 1 \rangle} \quad (40)$$

- **Supersymmetry Ward Identity** : 次に, 超対称性から tree レベルの振幅について成り立つことを述べる。 n -gluon の tree amplitude では, fermion は diagram の中に現れないことが明らか。よって tree レベルでは SUSY と non-SUSY の違いは出ない。すなわち, “tree level QCD =effectively Supersymmetric” と言い換えることができる。これを用いると, non-SUSY の QCD についても以下のことが言える。まず, 真空が超対称性を保つとき, Supercharge Q は真空 $|0\rangle$ を annihilate するので $Q|0\rangle = 0$ が成り立つ。

$$0 = \langle 0|[Q, \Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_n]|0\rangle = \sum_{i=1}^n \langle 0|\Phi_1 \cdots [Q, \Phi_i] \cdots \Phi_n|0\rangle \quad (41)$$

ここで, 上式の $\Phi = g^\pm(p)$ (gluon) または $\Lambda^\pm(p)$ (gluino) で, 今 supersymmetry 変換を

$$[Q(\eta), g^\pm(p)] = \mp \Gamma^\pm(p, \eta) \Lambda^\pm(p), \quad [Q(\eta), \Lambda^\pm(p)] = \mp \Gamma^\pm(p, \eta) g^\pm(p) \quad (42)$$

とする。 η を変換パラメータとして, $Q(\eta) = \bar{\eta}^\alpha Q_\alpha$, $\Gamma^+ = \bar{\eta} u_-(p)$, $\Gamma^-(p, \eta) = \bar{\eta} u_+(p)$, $\eta = \theta q$ と表す。

$$\Gamma^+(p, q) = \theta \langle q^+ | p^- \rangle = \theta [q p], \quad \Gamma^-(p, q) = \theta \langle q^- | p^+ \rangle = \theta \langle q p \rangle \quad (43)$$

よって, $\Phi_1 = \Lambda_1^+$, $\Phi_2 = g_2^+$, $\Phi_3 = g_3^+, \dots, \Phi_n = g_n^+$ と選ぶと

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0|[Q(\eta(q)), \Lambda_1^+ g_2^+ g_3^+ \cdots g_n^+]|0\rangle = -\Gamma^-(p_1, q) A_n(g_1^+ g_2^+ \cdots g_n^+) \\ &+ \Gamma^+(p_2, q) A_n(\Lambda_1^+ \Lambda_2^+ g_3^+ \cdots g_n^+) + \cdots + \Gamma^+(p_n, q) A_n(\Lambda_1^+ g_2^+ \cdots g_{n-1}^+ \Lambda_n^+) \end{aligned} \quad (44)$$

今, 全ての粒子の momentum は outgoing にとっている。massless gluino は helicity を保存する interaction をするので, 第 2 項 = $\cdots$ = 第 n 項 = 0。よって $A_n(g_1^+ g_2^+ \cdots g_n^+)$ はゼロが導かれる。次に, $\Phi_1 = \Lambda_1^+$, $\Phi_2 = g_2^-, \Phi_3 = g_3^+, \dots, \Phi_n = g_n^+$ と取ると,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0|[Q(\eta(q)), \Lambda_1^+ g_2^- g_3^+ \cdots g_n^+]|0\rangle \\ &= -\Gamma^-(p_1, q) A_n(g_1^+ g_2^- \cdots g_n^+) - \Gamma^+(p_2, q) A_n(\Lambda_1^+ \Lambda_2^- g_3^+ \cdots g_n^+) \end{aligned}$$

q は任意なので, $q = p_1$ と選ぶと, 従って $A_n(\Lambda_1^+ \Lambda_2^- g_3^+ \cdots g_n^+) = 0$ 。また, $q = p_2$ と選ぶと, 第 1 項=0, 従って $A_n(g_1^+ g_2^- \cdots g_n^+) = 0$ が言える。結局, (39) が non-SUSY の QCD についても証明された。(40) は Parke-Taylor [10] で conjecture として出され, Berends-Giele [11] によって, off-shell の recursion relation を用いて証明された。

7 Twistor 空間と MHV 振幅

上で見たように, massless の粒子の散乱振幅 $A(p_i)$ は Weyl spinor を用いて spinor 空間の振幅 $A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i)$ として表すことが出来る。ここで, right-handed の spinor λ_i はそのままにして, left-handed spinor $\tilde{\lambda}_i$ をその Fourier 共役な spinor μ^α に変換する。

$$\tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}} = i \frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{\alpha}}} \quad \mu^{\dot{\alpha}} = -i \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}} \quad (45)$$

すなわち, 振幅をいわば spinor 空間で “半” Fourier 変換すると,

$$A(\lambda_i, \mu_i) = \int \prod_i d\tilde{\lambda}_i e^{i\mu_i^{\dot{\alpha}} \tilde{\lambda}_{i\dot{\alpha}}} A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i) \quad (46)$$

となる。ここで $(\lambda_\alpha, \mu^{\dot{\alpha}})$ を “twistor 空間” という。任意の χ に対して $(\lambda_\alpha, \mu^{\dot{\alpha}}) \sim (\chi\lambda_\alpha, \chi\mu^{\dot{\alpha}})$ が成立。

$$A_n^{\text{MHV}}(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i) = \frac{\langle i j \rangle^4}{\langle 1 2 \rangle \langle 2 3 \rangle \cdots \langle n 1 \rangle} \delta^4(\sum_i p_i) = A_n^{\text{MHV}}(\lambda_i) \delta^4(\sum_i p_i) \quad (47)$$

であり、 $\delta^4(\sum_i p_i) = \int d^4x e^{ix^{\alpha\dot{\alpha}} \sum_i \lambda_{i\alpha} \tilde{\lambda}_{i\dot{\alpha}}}$ に注意すると

$$A_n^{\text{MHV}}(\lambda_i, \mu_i) = \int d^4x A_n^{\text{MHV}}(\lambda_i) \int \prod_i d\tilde{\lambda}_i e^{i(\mu_i + x\lambda_i)\tilde{\lambda}_i} = A_n^{\text{MHV}}(\lambda_i) \int d^4x \prod_{i=1}^n \delta(\mu_i + x\lambda_i) \quad (48)$$

すなわち、MHV 振幅は twistor 空間では一直線： $\mu_i + x\lambda_i = 0$ 上に support を持つことが分かる。

8 CSW の方法 “MHV rules”

Cachazo-Svrcek-Witten [2] は MHV ダイアグラムの twistor 空間での構造を用いて、MHV 振幅をそのうちの一本の外線を off-shell とする vertex に拡張し、一般の MHV でない helicity 振幅を計算するルールを与えた。すなわち、non-MHV のダイアグラムをいくつかの MHV ダイアグラムが内線で繋がった形に書き換え、それぞれの内線には Feynman rule の propagator と同じように、 i/p^2 の factor を与えて計算する。この場合 MHV ダイアグラムは内線が off-shell になっているので on-shell の振幅ではなく off-shell の line を含んだ vertex に拡張されている。この方法は Feynman グラフに比べて、ダイアグラムの数が非常に少なく済むので（いくつかの Feynman グラフを集めたものが、1 つの MHV ダイアグラムに相当する）効率的で、gluon のみならず fermion [12] や Higgs boson [13]、さらには electro-weak vector boson [14] を含んだ process にも適用された。

9 On-shell recursion

CSW 法が見つけられた後に、Britto-Cachazo-Feng (BCF) [3]、Britto-Cachazo-Feng-Witten (BCFW) [4] は NMHV 振幅を計算する画期的な方法を見出した。今、図のような n 点の tree 振幅 A_n^{tree} を考える。これは以下の式で与えられる。

$$A_n^{\text{tree}}(1, 2, \dots, n) = \sum_{h=\pm 1} \sum_{k=2}^{n-2} A_{k+1}^{\text{tree}}(\hat{1}, 2, \dots, k, -\hat{P}_{1,k}^{-h}) \frac{i}{P_{1,k}^2} A_{n-k+1}^{\text{tree}}(\hat{P}_{1,k}^h, k+1, \dots, n-1, \hat{n}) \quad (49)$$

すなわち、この n 点振幅は $k+1$ 点の A_{k+1}^{tree} と $n-k+1$ 点の A_{n-k+1}^{tree} の外線が n より少なく、momentum を複素数だけシフトした on-shell 振幅の積の和として表すことができる。いわば、tree を計算するのに tree を再利用するといえる。この証明には、複素関数論の Cauchy 定理と Factorization を用いる。今、 n -gluon 振幅で、1 番目と n 番目の gluon の運動量を以下のように shift する。

$$p_1 = \lambda_1 \tilde{\lambda}_1 \rightarrow \hat{p}_1 = (\lambda_1 + z\lambda_n) \tilde{\lambda}_1, \quad p_n = \lambda_n \tilde{\lambda}_n \rightarrow \hat{p}_n = \lambda_n (\tilde{\lambda}_n - z\tilde{\lambda}_1) \quad (50)$$

ここで、 z は任意の複素数である。これによって、散乱振幅は

$$A_n \rightarrow A_n(z) = A_n(\hat{p}_1(z), p_2, \dots, \hat{p}_n(z)) \quad (51)$$

のように、 z の複素関数に拡張される。ここで $A_n(0)$ が physical な散乱振幅を表す。 $P_{i,j} = p_i + \dots + p_j$ として、Factorization を用いて図の内線の propagator を $\frac{i}{\hat{P}_{1,k}^2}$ で表すと、propagator の分母=0 の位置：

$$\hat{P}_{1,k}^{\mu 2} = \frac{1}{2} \hat{P}_{1,k}^{\alpha \dot{\alpha} 2} = \frac{1}{2} (P_{1,k}^{\alpha \dot{\alpha}} + z\lambda_n^\alpha \tilde{\lambda}_1^{\dot{\alpha}})^2 = P_{1,k}^2 + z \langle n^- | P_{1,k} | 1^- \rangle = 0 \quad (52)$$

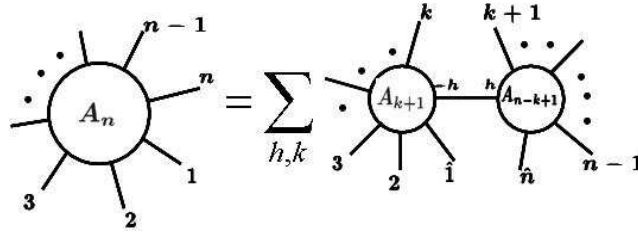


図 1: On-shell recursion

$$\text{すなわち } z = z_k = -\frac{P_{1,k}^2}{\langle n^- | P_{1,k} | 1^- \rangle} \quad (53)$$

に, $A_n(z)$ は simple pole の singularity を持つことになる。 $A_n(\infty) = 0$ を仮定して (tree では OK), Cauchy の定理を適用すると,

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{A_n(z)}{z} = A_n(0) + \sum_k \text{Res} \left[\frac{A_n(z)}{z} \right]_{|z=z_k} \quad (54)$$

これより, (49) が証明される。ここで, $\hat{1}^2 = \hat{n}^2 = \hat{P}_{1,k}^2(z = z_k) = 0$ に注意。この公式の応用として, non-MHV, 特に next-to-MHV(NMHV), 例えば $A_6^{\text{tree}}(1^+, 2^+, 3^+, 4^-, 5^-, 6^-)$ を考える。220 個の Feynman diagram に対して, たった 3 個の on-shell recursive diagram が存在する。3 つのうち一つはゼロで, 残りの 2 つは parity で結びつく。結果は以下のようにコンパクトな形で与えられる。

$$\begin{aligned} & A_6^{\text{tree}}(1^+, 2^+, 3^+, 4^-, 5^-, 6^-) \\ &= i \left[\frac{\langle 6^- | (1+2) | 3^- \rangle^3}{\langle 61 \rangle \langle 12 \rangle [34] [45] s_{612} \langle 2^- | (6+1) | 5^- \rangle} + \frac{\langle 4^- | (5+6) | 1^- \rangle^3}{\langle 23 \rangle \langle 34 \rangle [56] [61] s_{561} \langle 2^- | (6+1) | 5^- \rangle} \right] \quad (55) \end{aligned}$$

上で見たように, on-shell recursion の方法は, tree レベルは非常に簡潔な結果を与える。これを 1-loop レベルに拡張すると, simple pole の他に branch cut も現れる。この場合の処方箋は Bern 達によって与えられている。branch cut は既に 10 年以上も前から, unitarity を用いた loop の計算で知られている。N=4, N=1 の Super Yang-Mills 理論ではループレベルでは, 対数項 (logarithm) や poly-log が現れる。一方, N=0 の QCD ではさらに非対数的な有理項 (rational term) が出現する。これらを如何に計算するかが Bern 達によって与えられている。これは recursive に求めることができ, 例えば, $A_6^{1\text{-loop}}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+, 5^+, 6^+)$ では, Feynman グラフでは 1-loop の 6-gluon のダイアグラムは 10,680 個あるのに対して, recursive diagram は数個で済む。また, loop レベルの recursion-relation ではシフトする momentum をどう取れば, $A(z) \rightarrow 0$ $z \rightarrow \infty$ となるかが一つの問題である。

10 おわりに

この talk では, 弦理論と QCD との関連で 2 つのトピックスを述べた。一つは弦/ゲージ双対性から AdS 空間での dual string によるハードな散乱過程の解析で QFT の大角度散乱や DIS の構造関数について, ベキ的振舞いが AdS 空間の warp factor から説明されることが分かった。一方, multi-particle 散乱振幅計算について最近の手法: spinor-helicity formalism に基づく, CSW の MHV rule と BCF および BCFW による on-shell recursion の方法である。今後さらに massive-loop や n=6,7,8 の場合の 1-loop-level への拡張, automatic computation 等の開発等が期待される。また第 1 原理からの MHV 振幅の導出, たとえば MHV lagrangian[19, 20] や Self-dual Yang-Mills 理論との関連 [21, 22, 23] を調べる方向も重要であろう。いずれにしても新たなアイデアの創出が必要である。

参考文献

- [1] K. Igi and S. Matsuda, Phys. Rev. Lett. **18** (1967) 625.
R. Dolen, D. Horn and C. Schmid, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 402.
- [2] F. Cachazo, P. Svrcek and E. Witten, JHEP **09** (2004) 006.
- [3] R. Britto, F. Cachazo and B. Feng, Nucl.Phys.**B715** (2005) 499.
- [4] R. Britto, F. Cachazo, B. Feng and E. Witten, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 181602.
- [5] V. A. Matveev, R. M. Muradian and A. N. Tavkhelidze, Lett. Nuovo Cimento **7** (1973) 719.
- [6] S. J. Brodsky and G. R. Farrar, Phys. Rev. Lett. **31** (1973) 1153.
- [7] J. Polchinski and M. Strassler, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 031601.
- [8] J. Polchinski and M. Strassler, JHEP **5** (2003) 012.
- [9] H. Baba and T. Uematsu, unpublished.
- [10] S. J. Parke and T. Taylor, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 2459.
- [11] F. A. Berends and W. T. Giele, Nucl. Phys. **B294** (1987) 700.
- [12] G. Georgiou and V. V. Khoze, JHEP **0405** (2004) 070.
G. Georgiou, E. W. N. Glover and V. V. Khoze, JHEP **0407** (2004) 048.
- [13] L. J. Dixon, E. W. N. Glover and V. V. Khoze, JHEP **0412** (2004) 015.
S. D. Badger, E. W. N. Glover and V. V. Khoze, JHEP **0503** (2005) 023.
- [14] Z. Bern, D. Forede, D. A. Kosower and P. Mastrolia, Phys. Rev. **D72** (2005) 025006.
- [15] 最近の review article を一つ挙げる。それ以外はこの論文の reference を参照。
Z. Bern, L. J. Dixon and D. A. Kosower, arXiv:0704.2798[hep-ph] (April 2007).
- [16] M. L. Mangano and S. J. Parke, Phys. Rep. **200** (1991) 3001.
- [17] L. Dixon, Lectures at TASI 95, hep-ph/9601359 (1996).
- [18] J. Kodaira, “摂動論的量子色力学：現状と課題”，基研研究会「素粒子物理学の進展 2006」.
L. Dixon, “Twistor String Theory and QCD”, talk at HEP2005 Europhysics Conference.
Z. Bern, “On-shell Methods in Perturbative QCD”, talk at ICHEP 2006.
D. Kosower, “On-shell Bootstrap Approach to Loop Amplitudes” talk at Loops and Legs 2006.
- [19] A. Gorsky and A. Rosly, JHEP **0601** (2006) 101.
- [20] P. Mansfield, JHEP **0603** (2006) 037.
- [21] W. A. Bardeen, Prog.Theor.Phys.Suppl.**123** (1996) 1.
- [22] D. Cangemi, Nucl.Phys.**B484** (1997) 521;
Int. J. Mod. Phys. **A12** (1997) 1215.
- [23] Y. Kitadono, T. Uematsu and Y. Yoshida, unpublished.