

The AdS/QCD

橘 基¹

佐賀大学理工学部

ここではゲージ/重力対応に対する bottom-up の立場から、3つのアプローチを紹介する。

1 AdS/QCD とは

ゲージ/重力対応 (AdS/CFT 対応) を用いたハドロン物理の研究は、その発見の当初から現在に至るまで盛んに行われてきている²。このような弦理論 (または超重力理論) を起点とした手法は top-down のアプローチと言える。一方、近年この対応に動機づけられた、いわば bottom-up アプローチと呼ばれる解析が盛んに行われるようになってきた。この手法は場の理論として QCD を出発点にしていることから、AdS/QCD と呼ばれている。ここではこの AdS/QCD の契機となった Son-Stephanov の QCD の deconstruction 模型 [1] を初めとする 3つの互いに関連した研究についての紹介を行う。

2 QCD の deconstruction 模型

次のようなラグランジアンを考えてみよう。

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{K+1} f_k^2 \text{Tr} |D_\mu \Sigma^k|^2 - \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \text{Tr} (F_{\mu\nu}^k)^2 \quad (1)$$

ただしここで $D_\mu \Sigma^k = \partial_\mu \Sigma^k - i(gA_\mu)^{k-1} \Sigma^k + i\Sigma^k (gA_\mu)^k$ は共変微分であり、 $(gA_\mu)^k \equiv g_k A_\mu^k$ 、 $A_\mu \equiv A_\mu^a \tau^a / 2$ という簡略化を行っている。また $A_\mu^0 = A_\mu^{K+1} = 0$ である。

このモデルは、 $K+1$ 個の非線形シグマ模型の場合 $\Sigma^k \in SU(2)$ (フレーバー数 N_f の場合には $SU(N_f)$) と、 K 個のゲージ場 A_μ^k とから成る。ラグランジアン (1) は次のカイラル $SU(2) \times SU(2)$ 対称性、および $SU(2)^K$ ローカル対称性を持つ。

$$\begin{aligned} \Sigma^1 &\longrightarrow L \Sigma^1 U_1^\dagger(x) & L &\in SU(2) \\ \Sigma^k &\longrightarrow U_{k-1} \Sigma^k U_k^\dagger(x) & (k &= 2, 3, \dots, K) \\ \Sigma^{K+1} &\longrightarrow U_K(x) \Sigma^1 R^\dagger & R &\in SU(2) \end{aligned} \quad (2)$$

特に、 $K+1$ 個の場の積 $\Sigma \equiv \Sigma^1 \Sigma^2 \dots \Sigma^{K+1}$ は、その変換性 (カイラル変換) $\Sigma \longrightarrow L \Sigma R^\dagger$ から、パイオン場に相当する自由度とみなせる。

一方 (1) に含まれるパラメータは $K+1$ 個の”崩壊定数” f_k と、 K 個のゲージ結合定数 g_k である。ここではこれらの結合定数が、 $f_k = f_{K+2-k}$ 、 $g_k = g_{K+1-k}$ という離散的対称性を持つと仮定する。これは後に見るようにパリティ対称性に相当する。

ここで K ごとの模型の様子を見てみよう。 $K=0$ の場合、系には Σ^1 のみが含まれ、これはいわゆるカイラルラグランジアンそのものである。一方 $K=1$ の場合、これはいわゆる hidden local symmetry (HLS) Lagrangian に等しい。このとき系にはパイオンとともにベクトルメソンである ρ メソンが、hidden local 対称性のゲージ場として現れる。さらに $K=2$ の場合は、パイオンと ρ メソン以外に、軸性ベクトルメソン a_1 を含む模型に相当する。ラグランジアン (1) はこれらを含む一般的な形をしている。この模型を”理論空間図”として表現したのが図 1 である。以下でこれらメソンの物理量が、

¹e-mail address: motoi@cc.saga-u.ac.jp

²これに関する詳しい記述は本研究会の講演内容を参照。

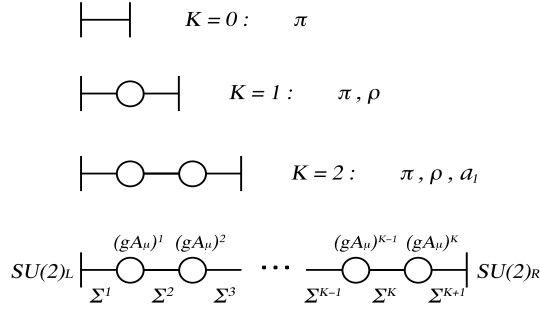


図 1: 式 (1) の”理論空間図”。 $K = 0, 1, 2$ および一般の K での構造が示されている。

パラメター f_k や g_k を用いてどのように表されるかを見ることにしよう。

パイオン崩壊定数 f_π

まず場 Σ^k を次のように定義する。

$$\Sigma^k = \exp \left\{ i \Pi \frac{f}{2f_k^2} \right\} \quad \text{ここで} \quad \Pi = \pi^a \frac{\tau^a}{2} \quad (3)$$

f は f_k の関数である。この表記の利点はパイオン場 Π が他の場と混じらない点である。またこの時 f の値は、 π^a が canonical な運動項を持つように決められる。

$$\mathcal{L}_{kin} = \sum_{k=1}^{K+1} \frac{f^2}{4f_k^2} \text{Tr}(\partial_\mu \Pi)^2 = \sum_{k=1}^{K+1} \frac{f^2}{4f_k^2} \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi^a)^2 \quad (4)$$

これより

$$\sum_{k=1}^{K+1} \frac{f^2}{4f_k^2} = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{4}{f^2} = \sum_{k=1}^{K+1} \frac{1}{f_k^2} \quad (5)$$

詳しい議論を省くが、軸性カレントに対する Noether の定理を用いることで、この f がパイオン崩壊定数 f_π に等しいことが示される。

ベクトルメソンの質量スペクトル

ラグランジアン (1) における真空 (基底状態) は、全ての k にたいして $\Sigma^k = 1$ と置いたものである。今、この真空の周りで A_μ^k について展開し、その 2 次の項を見てみよう。すると

$$\mathcal{L}_{A^2} = \sum_{k=1}^{K+1} f_k^2 \text{Tr}[(gA_\mu)^{k-1} - (gA_\mu)^k]^2 \equiv \sum_{k,k'=1}^K (M^2)_{kk'} \text{Tr} A_\mu^k A_\mu^{k'} \quad (6)$$

が得られる。ただしここで $K \times K$ 質量行列 $(M^2)_{kk'}$ は

$$(M^2)_{kk'} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} g_1^2(f_1^2 + f_2^2) & -g_1 g_2 f_2^2 & & \cdots & \\ -g_1 g_2 f_2^2 & g_2^2(f_2^2 + f_3^2) & -g_2 g_3 f_3^2 & \cdots & \\ & -g_2 g_3 f_3^2 & g_3^2(f_3^2 + f_4^2) & -g_3 g_4 f_4^2 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -g_{K-2} g_{K-1} f_{K-1}^2 & g_{K-1}^2(f_{K-1}^2 + f_K^2) & -g_{K-1} g_K f_K^2 \\ & & & 0 & -g_{K-1} g_K f_K^2 & g_K^2(f_K^2 + f_{K+1}^2) \end{pmatrix} \quad (7)$$

で与えられる。この質量行列を直交行列 b_m^k を用いて対角化する。

$$\sum_{k,k'=1}^K b_m^k (M^2)_{kk'} b_n^{k'} = m_n^2 \delta_{mn} \quad \text{ただし} \quad b^T b = b b^T = 1 \quad (8)$$

ここで質量の固有状態 (eigenstate) としてのベクトル場 α_μ^n を新たに $A_\mu^k \equiv \sum_n b_n^k \alpha_\mu^n$ あるいは $\alpha_\mu^n \equiv \sum_k b_n^k A_\mu^k$ で定義する。 $\{\alpha_\mu^n\} (n = 1, \dots, K)$ を用いて (6) は diagonal である。 b_n^k を決定する式は

$$f_{k+1}^2 [(gb_n)^{k+1} - (gb_n)^k] - f_k^2 [(gb_n)^k - (gb_n)^{k-1}] = -\frac{m_n^2 b_n^k}{g_k} \quad (9)$$

で与えられ、これは離散化された Sturm-Liouville 型の差分方程式となる。

固有値 m_n ($n = 1, \dots, K$) は物理的にはゲージ場の質量である。結合定数に関する仮定から直ちに、差分方程式 (9) の解には $b_n^k = +b_n^{K+1-k}$ と $b_n^k = -b_n^{K+1-k}$ を満たすものがあることに気づく。前者はベクトルメソンで n が奇数 ($n = 1, 3, \dots$)、後者は軸性ベクトルメソンで n が偶数 ($n = 2, 4, \dots$) のモードにそれぞれ対応する。最低次の $n = 1$ と $n = 2$ はそれぞれ、 ρ メソンおよび a_1 メソンに相当する。このような偶奇の交代的振る舞いは、実験的にも見られる興味深い特徴である。

ベクトルメソンとパイオンとの 3 点結合 $g_{n\pi\pi}$

次に n 番目のベクトルメソンのモードとパイオン対との結合の大きさ $g_{n\pi\pi}$ を計算する。 A_μ と Π による展開から直ちに

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A\pi\pi} &= i \sum_{k=1}^{K+1} \frac{f_\pi^2}{4f_k^2} \text{Tr}[\partial_\mu \Pi, \Pi] [(gA_\mu)^{k-1} + (gA_\mu)^k] \\ &= i \sum_{n=1}^K \sum_{k=1}^{K+1} \frac{f_\pi^2}{4f_k^2} [(gb_n)^{k-1} + (gb_n)^k] \text{Tr}[\partial_\mu \Pi, \Pi] \alpha_\mu^n \end{aligned} \quad (10)$$

ここで $\mathcal{L}_{\alpha\pi\pi} = -g_{\alpha\pi\pi} \epsilon^{abc} \partial_\mu \pi^a \pi^b \alpha_\mu^c$, $\alpha = \rho, \rho', \dots$ と規格化することによって、 $g_{n\pi\pi}$ と f_k, g_k の関係が

$$g_{n\pi\pi} = \sum_{k=1}^{K+1} \frac{f_\pi^2}{4f_k^2} \frac{1}{2} [(gb_n)^{k-1} + (gb_n)^k] \quad (11)$$

のように与えられる。 b_n^k の $k \rightarrow K+1-k$ の折り返しに対する性質から、軸性ベクトルメソンに対して、 $g_{n\pi\pi} = 0$ ($n = 2, 4, \dots$) となることが分かる。すなわちパイオンと軸性ベクトルメソンとの結合は 0 である。

同様の手続きを行うことでベクトルメソンの崩壊定数 g_{nV}, g_{nA} やスペクトルに関する和則、パイオンの形状因子などが計算できるが、紙数の都合上ここでは割愛する。

連続極限 ($K \rightarrow \infty$)

さて、これまでの解析において任意の数であった K を ∞ に取る極限を考えてみよう。この極限において f_k と g_k を、 $u \equiv \left(k - \frac{K}{2}\right) a$ で定義される連続変数 u を用いて書きかえる。ここで a は“格子定数”の役割を果たす、理論空間での長さの単位に相当する量である。連続極限を、「 $K \rightarrow \infty$ かつ $a \rightarrow 0$ ($Ka \equiv 2u_0$ は固定)」と定義するならば、関数 f_k や g_k は次のように書き換えられるだろう。

$$a f_k^2 \equiv f^2 \left(\left(k - \frac{K}{2}\right) a \right) = f^2(u) \quad a g_k^2 \equiv g^2 \left(\left(k - \frac{K}{2}\right) a \right) = g^2(u) \quad (12)$$

また行列 b_n^k については $\frac{1}{\sqrt{a}} b_n^k \equiv b_n(u)$ と書き直し、規格直交条件を満たすとする。

以下、有限の K において導出した式の連続極限を取ることを考えよう。まず f_π の表式は

$$\frac{4}{f_\pi^2} = \int_{-u_0}^{u_0} \frac{du}{f^2(u)} \quad (13)$$

と書かれる。一方、差分方程式 (9) は

$$g(u) \frac{d}{du} \left(f^2(u) \frac{d(g(u)b_n(u))}{du} \right) = -m_n^2 b_n(u) \quad (14)$$

となることが分かる。また 3 点結合 $g_{n\pi\pi}$ は次の形に表せる。

$$g_{n\pi\pi} = \frac{f_\pi^2}{4} \int_{-u_0}^{u_0} \frac{du}{f^2(u)} g(u) b_n(u) \quad (15)$$

もし u 積分がうまく収束すれば、これらの表式はすべて連続極限でうまく振る舞うことになる。

QCD の脱構築 (Dimensional deconstruction)

こうしてできあがった $K \gg 1$ での模型は、曲がった時空での 5 次元のゲージ理論とみなせ、この時変数 u は第 5 の次元の役割を果たす。また場 Σ^k は 5 番目の次元 u に沿った”リンク変数”と解釈される ($\Sigma^k \approx 1 + iaA_5(u)$)。この解釈のもとでラグランジアン (1) の連続極限は、

$$S = -\text{Tr} \int du d^4x \left(-f^2(u) F_{5\mu}^2 + \frac{1}{2g^2(u)} F_{\mu\nu}^2 \right) \quad (16)$$

と書かれる。ここで $f^2(u) = \frac{1}{g_0^2} e^{2w-2\phi}$, $g^2(u) = g_0^2 e^{2\phi}$ と選ぶと、この作用は、ゲージ結合定数が g_0 、計量が $ds^2 = -du^2 + e^{2w(u)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ のデイトン場 ϕ と結合した系とみなせる。

また連続極限におけるパイオン場 Σ は 5 次元ゲージ場の第 5 成分に関する Wilson line に等しい。

$$\Sigma(x) \equiv \Sigma^1 \Sigma^1 \dots \Sigma^{K+1} \longrightarrow P \exp \left(i \int_{-u_0}^{+u_0} du A_5(u, x) \right) \quad (17)$$

厳密に解ける例

ここまでの話では結合定数 f_k, g_k を一般的に扱ってきたが、特殊な場合には厳密に計算が実行でき、それを実験結果や他の現象論と比較することができる。ここではそのような具体例として $f(u) = f, g(u) = g$ で定数の場合を考える (これは 5 次元の平坦な時空に相当)。また以下 u_0 の値は 1 に規格化する。

まずパイオン崩壊定数は (13) よりただちに $f_\pi^2 = 2f^2$ と得られる。一方ベクトルメソンの”波動関数”に対する微分方程式 (14) は

$$\frac{d^2 b_n(u)}{du^2} + \frac{m_n^2}{f^2 g^2} b_n(u) = 0 \quad b_n(\pm 1) = 0 \quad (18)$$

であり、この解は容易に得られ以下の正弦型である。

$$b_n(u) = \sin \left(\frac{n\pi}{2} (u+1) \right) \quad m_n = \frac{\pi f g}{2} n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (19)$$

また 3 点結合定数 $g_{n\pi\pi}$ は

$$g_{n\pi\pi} = \frac{f_\pi^2}{4} \int_{-1}^1 \frac{du}{f^2(u)} g(u) b_n(u) = \frac{g}{2} \int_{-1}^1 \sin \left(\frac{n\pi}{2} (u+1) \right) du = \frac{2g}{n\pi} \quad (20)$$

と計算される (ただし n は奇数)。ここで具体的に $n = 1$ 、すなわち ρ メソンの場合を考えてみる。この時 m_ρ^2 と $g_{\rho\pi\pi}^2 f_\pi^2$ の比は無次元で、

$$\frac{m_\rho^2}{g_{\rho\pi\pi}^2 f_\pi^2} = \frac{\left(\frac{\pi f g}{2} \right)^2}{\left(\frac{2g}{\pi} \right)^2 \times 2f^2} = \frac{\pi^4}{32} \approx 3.04 \quad (21)$$

という値が得られる。実験から得られている値は約 1.9 である。一方他のモデル、例えば河原林-鈴木-Riazuddin-Fayyazuddin(KSRF) 関係式ではこれは 2 に等しい。

ここで考察した模型は、カイラル対称性の自発的破れに伴う南部-Goldstone 粒子であるパイオン場と、多種類のベクトルメソンを記述するものと期待される。興味深いことに、連続極限を取った後の理論は、曲がった 5 次元時空におけるゲージ理論に等価であることが示された。AdS/CFT 対応との関連性を考えた時、次のような仮説が成り立つ。「Deconstruction 模型において連続極限を取って得られた 5 次元の理論は QCD に双対である。」

しかしながら問題点も残されている。元々ここでの動機の一つとして、 a_1 メソンより高い励起状態もうまく取り扱いたいという願いがあったが、それはあまりうまくいったとは言えない。ここで解析した厳密に解ける模型では、第 n 励起状態の質量は、現実のハドロンスpektrルの傾向である $m_n \sim \mathcal{O}(\sqrt{n})$ を再現しない。

3 ハドロンのホログラフィック模型

前章で見た deconstruction 模型に現れた 5 次元の場の理論を用いて、QCD のメソンやバリオンの性質をうまく捕らえることができるかもしれない。その際に重要なのは $f(u), g(u)$ の 5 次元座標に対する形である。これはバルクの立場から言えば、5 次元時空の計量の選び方を意味する。そこでここでは、Erlich 達および Rold-Pomarol によって行われた bottom-up アプローチを紹介する [2]。

AdS/CFT における境界とバルクの基本的な関係は場-演算子対応 (field-operator correspondence) とよばれる、4 次元 (境界) での演算子 $\leftrightarrow$ 5 次元 (バルク) における場の間の関係である。特に 4 次元での保存カレントは、5 次元における質量 0 のゲージ場に境界上で結合している。このゲージ場は曲がった 5 次元空間において、ある運動方程式を満たし、境界上での境界条件を課すことで解の形が決まるだろう。こうしてバルクの理論に対する古典的作用が固定される。

ここで今 QCD のカイラル対称性に付随した物理を、bottom-up の立場で扱いたい。すると 4 次元で用意する operator の最低限の組は、保存カイラルカレント $J_L^\mu \equiv \bar{q}_L \gamma^\mu t^a q_L$ および $J_R^\mu \equiv \bar{q}_L \gamma^\mu t^a q_R$ 、それにカイラル対称性の破れの指標である、カイラル凝縮 $\bar{q}_R q_L^\beta$ と考えるのは自然な立場であろう。すると上の規則から次の表が書かれる。

4D: $\mathcal{O}(x)$	5D: $\phi(x, z)$	p	Δ	$(m_5)^2$
$\bar{q}_L \gamma^\mu t^a q_L$	$A_{L\mu}^a$	1	3	0
$\bar{q}_L \gamma^\mu t^a q_R$	$A_{L\mu}^a$	1	3	0
$\bar{q}_R q_L^\beta$	$(2/z)X^{\alpha\beta}$	0	3	-3

表 field-operator 対応に基づくハドロンのホログラフィック模型

ここで 5 次元の場 $A_{L\mu}^a, A_{R\mu}^a, X^{\alpha\beta}$ の質量 m_5 は、関係式 $(\Delta + p)(\Delta + p - 4) = (m_5)^2$ を通じて決定される (Δ は p -形式の演算子の共形次元を表す)。また a および α, β はフレーバーの添字である。

今これらの場が 5 次元の AdS 時空に住むと仮定する。また 5 番目の空間は有限とする。

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}(-dz^2 + dx^\mu dx_\mu) \quad 0 \leq z \leq z_m \quad (22)$$

パラメータ z_m は後で見るように QCD のスケールパラメータ $\Lambda_{\text{QCD}}^{-1}$ の役目を果たす。

この模型の作用関数を次のように書こう。

$$S = \int d^5x \sqrt{|g|} \text{Tr} \left\{ |D_M X|^2 + 3|X|^2 - \frac{1}{4g_5^2} (F_{LMN}^2 + F_{RMN}^2) \right\} \quad (23)$$

ここで $D_M X \equiv \partial_M X - iA_{LM}X + iXA_{RM}$, $A_{L,R} = A_{L,R}^a t^a$. $M = (\mu, 5)$ は 5 次元の添字。 g_5 は 5 次元ゲージ結合定数である。また $F_{L(R)}$ は場の強さを表すテンソルである。

カイラル対称性の破れ

作用 (23) の古典解を考えよう。ゲージ場の期待値はすべて 0 とおき、 X を z のみの関数であると仮定して運動方程式を解く。するとその解が $X_0(z) = \frac{1}{2}(M_q z + C_1 z^3)$ となる。 M_q および C_1 は積分定数である。詳しい議論は省略するが、 M_q をクォーク質量行列、 C_1 をカイラル凝縮の真空期待値 $\langle \bar{q}q \rangle$ と解釈することができる。以下簡単のためフレーバー 2 の場合を考え、さらにクォーク質量およびカイラル凝縮については $M_q = m_q \mathbf{1}$, $C_1 = \sigma \mathbf{1}$ ($\mathbf{1}$ は単位行列) の形を仮定する。

ベクトルメソン

次に古典解 $X_0(z)$ のまわりのゆらぎを考え、その質量や相互作用の様子をみていく。そのためにベクトルメソン V_μ を $V_\mu \equiv (A_{L\mu} + A_{R\mu})/2$ で定義する。 V_μ に対する線形化された運動方程式は

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z} \frac{dV_\mu^a(q, z)}{dz} \right) + \frac{q^2}{z} V_\mu^a(q, z) = 0 \quad (24)$$

と与えられる。ただし $V_\mu^a(q, z)$ は $V_\mu^a(x, z)$ のフーリエ変換である。この式が $X_0(z)$ に依らない点に注意しよう。これはこのモデルではベクトルメソンの物理量は m_q や $\langle \bar{q}q \rangle$ を含まないことを意味する。

ここでさらに $V^{\mu a}(q, z) = V(q, z) V_0^{\mu a}(q)$ と分解して、 $V_0^{\mu a}(q)$ を境界上でベクトルカレント $J_\mu^a \equiv \bar{q} \gamma_\mu t^a q$ に結合する外場のフーリエ変換と置く。この時

$$\begin{aligned} S_{\text{VM}} &= -\frac{1}{2g_5^2} \int d^4x dz \frac{1}{z} V_\mu^a(q, z) \left[z \frac{d}{dz} \left(z \frac{d}{dz} \right) + q^2 \right] V^{\mu a}(q, z) \\ &= -\frac{1}{2g_5^2} \int d^4x \left[\frac{1}{z} V_\mu^a(q, z) \frac{dV^{\mu a}(q, z)}{dz} \right]_{z=\epsilon \rightarrow 0} \end{aligned} \quad (25)$$

が得られる。(25) を外場 V_0 について 2 回微分することで真空分極関数 Π_V が得られる。

$$F.T. \langle J_\mu^a(x) J_\nu^b(0) \rangle = \delta^{ab} (q_\mu q_\nu - q^2) \Pi_V(Q^2), \quad \Pi_V(-q^2) = -\frac{1}{g_5^2 Q^2} \left[\frac{1}{z} \frac{dV(q, z)}{dz} \right]_{z=\epsilon \rightarrow 0} \quad (26)$$

一方、 $V(q, z)$ の漸近形は、 $V(Q, z) = 1 + \frac{Q^2 z^2}{4} \log(Q^2 z^2) + \dots$ となることから、 $\Pi_V(Q^2) \sim -\frac{1}{2g_5^2} \log(Q^2)$ と振る舞い、これと摂動論的 QCD の結果との比較から、 $g_5^2 = \frac{12\pi^2}{N_c} = 4\pi^2$ ($N_c = 3$) を得る。

メソンは式 (24) を満たす 5 次元の場の規格化可能なモードに相当する。 $z = z_m$ (および $z \rightarrow 0$) における境界条件から、このモードは離散的固有値を持つ。固有値はそれぞれのメソンの (質量)² に対応し、固有関数の微分の $z \rightarrow 0$ での振舞いはメソン崩壊定数を与える。軸性ベクトルメソンとパイオンについても同様の解析が可能である。

このモデルには 4 つのパラメーター (m_q , σ , g_5 , z_m) が含まれている。このうち g_5 を除く 3 つを実験値で決め、他の物理量の値を求めた例が下の表である。

観測量	実験値 (MeV)	モデルの値 (MeV)
m_π	139.6 ± 0.0004	139.6*
m_ρ	775.8 ± 0.5	775.8*
m_{a_1}	1230 ± 40	1363
f_π	92.4 ± 0.35	92.4*
$\sqrt{F_\rho}$	345 ± 8	329
$\sqrt{F_{a_1}}$	433 ± 13	452
$g_{\rho\pi\pi}$	6.03 ± 0.07	5.43

表 ホログラフィック模型によるハドロンの物理量の計算結果。*の印はインプットを表す。

ベクトルメソンの質量は Π_V の極で与えられるが、実は Π_V の漸近形には解析解が存在する。

$$\Pi_V(q^2) = \frac{q^2}{2g_5^2} \frac{J_0(qz_m) \log(q^2 \epsilon^2) - \pi Y_0(qz_m)}{J_0(qz_m)} \quad (27)$$

ここで $J_0(x), Y_0(x)$ はそれぞれ 0 次の Bessel 関数である。これは次章の内容と関わってくる。

4 Migdal のアプローチと Padé 近似

ところで Shifman が次のようなことを述べている [3]。

... *A similar question was raised long ago, decades before AdS/QCD, by A. Migdal, who asked himself what is the best possible accuracy to which $\log(Q^2)$ can be approximated by an infinite sum of infinitely narrow discrete resonances, and what are the corresponding values of the resonance masses and residues. He answered this question as follows: “the accuracy is exponential at large Q^2 and the resonances must be situated at the zeros of a Bessel function.”*

これはどういうことであろうか。前章の解析で得られたベクトルメソンの質量スペクトルの特徴が、実ははるか以前に導出されていたというのだ。本章ではこの Migdal のアプローチを紹介する [4]。

Padé 近似³

まず初めにここで用いられる近似について説明しよう。 z の関数 $F(z)$ に対する Padé 近似とは以下のように定義される。今 $[L, M]$ Padé approximants という量が、次の形で与えられるとする。

$$[L, M] \equiv \frac{R_L(z)}{Q_M(z)} = \frac{r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots + r_L z^L}{1 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots + q_M z^M} \quad (28)$$

これは有理多項式の比にほかならない。このとき、 $F(z) = [L, M] + \mathcal{O}(z^{L+M+1})$ となるよう、係数 (r_n, q_n) の組を選ぶことができる。これを $L + M$ 次の Padé 近似と呼ぶ。Migdal は、深 Euclidean 領域 ($Q^2 \rightarrow \infty$) での真空分極関数 $\Pi_V(Q^2)$ に対して、 $[N, N]$ Padé 近似を適用し、さらに Migdal 極限とよばれる極限を取ることで、ベクトルメソンの質量を求めようとした。

Migdal のアプローチ

彼は QCD のラージ N_c 極限を用いて得られている、 $Q^2 \rightarrow \infty$ での分極関数 $\Pi_V(Q^2)$ のスケール不変な部分、すなわち leading log の部分のみを考えた ($\Pi_V(q^2) \sim q^2 \log(q^2/\mu^2)$)。ここで μ はくりこみに関係するエネルギースケールである。そこで $t \equiv q^2/\mu^2$ として、 $f_0(t) = \log t$ という関数を $t = -1$ の周りで展開することを考える。

先に述べた Padé 近似を適用する。この時、関数 $f_0(t)$ は二つの多項式、 $R_N(t)$ および $Q_N(t)$ を用いて、以下のように $[N, N]$ Padé 近似の形で表せるはずである。

$$f_0(t) - \frac{R_N(t)}{Q_N(t)} = \mathcal{O}((t+1)^{2N+1}) \quad (29)$$

これは微分形で書くと次のようになる。

$$\left. \frac{d^m}{dt^m} [Q_N(t) f_0(t) - R_N(t)] \right|_{t=-1} = 0 \quad m = 0, 1, \dots, 2N \quad (30)$$

$$\left. \frac{d^m}{dt^m} [Q_N(t) f_0(t)] \right|_{t=-1} = 0 \quad m = N+1, \dots, 2N \quad (31)$$

ここで式 (31) を解くために、複素 t 平面上での解析接続を行う。関数 $f_0(t)$ は正の実軸上に沿って branch cut を持つ (図 3)。この cut を横切るとき、 $f_0(t)$ の虚部の値は 2π の跳びを持つ。Cauchy-Goursat の

³Padé 近似とその応用に関しては、D. S. Gaunt and A. J. Guttmann, "Asymptotic analysis of coefficients" Phase Transitions and Critical Phenomena, ed. Domb and Green (Academic Press). などを参照。

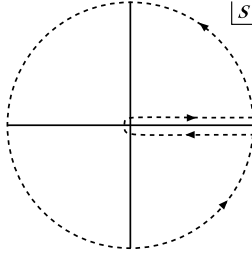


図 2: 複素積分を評価するための経路

積分定理を用いると

$$\int_0^\infty ds \frac{Q_N(s)}{(s+1)^{m+1}} = 0 \quad m = N+1, \dots, 2N \quad (32)$$

が得られる。これを満たす関数 $Q_N(t)$ は $Q_N(t) = (t+1)^N P_N\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$ であることが示される。またこれより $R_N(t)$ も求められ、真空分極関数 Π_V に対する Padé 近似の表式が得られることになる。

この近似の精度をどんどんあげていくことは、 N を大きくすることを意味する。そこで Migdal は $N \rightarrow \infty$ と同時に、 $\mu \rightarrow \infty$ すなわち $q^2 \ll \mu^2$ となるような低エネルギー極限を取ることを提案した。ただしこの極限を取る際、比 $\frac{\mu}{N} \equiv \mu_{IR}$ は一定に保たれるようにする。これが Migdal の極限である。

非常に興味深いことにこの極限において、2つの有理関数 $R_N(t), Q_N(t)$ はともに、 $\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(t) = J_0(2N\sqrt{t}), \lim_{N \rightarrow \infty} R_N(t) = J_0(2N\sqrt{t}) \log t - \pi Y_0(2N\sqrt{t})$ と Bessel 関数を含む形に書き直される。こうして Padé 近似を行った真空分極関数の Migdal 極限が次式で与えられる。

$$\Pi_V(q^2) \propto q^2 \frac{J_0(2Nq/\mu) \log(q^2/\mu^2) - \pi Y_0(2Nq/\mu)}{J_0(2Nq/\mu)} \quad (33)$$

この結果を式 (27) と比べたとき、もし以下のパラメーターの同一視

$$\frac{1}{\mu} = \epsilon \quad \frac{2}{\mu_{IR}} = z_m \quad (34)$$

が成り立つならば、(27) と (33) は一致し、そこから得られる質量スペクトルも同じものになる。

5 まとめと展望

ここでは一見異なってみえる 3つのアプローチ（deconstruction 模型、ハドロンのホログラフィック模型、QCD の Migdal 極限）の間に非自明な関係がある可能性を見てきた。特に高次元の概念をまったく含まない Migdal のアプローチと、5次元を出発点にしたホログラフィックなアプローチとの対応は驚くべきものがある。果たしてここでの数学的結果には何らかの意味があるのであろうか [5]。

その反面こういった AdS/QCD と呼ばれる重力理論に動機づけられた bottom-up のアプローチには、計量の取り方やラグランジアン of 形などに関しての不定要素も多く、カイラルラグランジアンなどの従来の方法と比肩し得るハドロンの有効手段となり得るかは現段階では明らかでない。今後はこの方向での発展が期待されるだろう。またここで行ったような bottom-up 型のアプローチは、QCD 以外の場の理論に適用することが可能かもしれない。様々な観点から眺めることでこの手法の新しい側面が開かれれば、それは非常に面白いことだろう。

参考文献

- [1] D. T. Son and M. A. Stephanov, Phys. Rev. **D69** (2004) 065020.
- [2] J. Erlich et al., Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 261602.
L. Da Rold and A. Pomarol, Nucl. Phys. **B721** (2005) 79.
- [3] M. Shifman, *hep-ph/0507246*.
- [4] A. A. Migdal, *Ann. Phys.* **110** (1978) 46.
J. Erlich, G. D. Kribs and I. Low, *Phys. Rev D* **73** (2006) 096001.
- [5] これについては A. Falkowski and M. Pérez-Victoria, JHEP 0702 (2007) 086 などを参照.