

超弦理論による QCD の解析

杉本茂樹¹
名大理

最近、茨城大の酒井氏との共同研究 [1, 2] で、超弦理論を用いて QCD を構成し、ゲージ/重力対応の考え方に基づいて解析する方法を提案しました。ここでは、この方法の実用的な側面に主眼を置き、超弦理論の知識の全くない読者にもこれを読んだだけで扱えるようになってもらえることを目標に具体的に説明します。

1 はじめに

研究会では、超弦理論を用いて QCD を構成する方法と、ゲージ/重力対応を用いた解析の方法を説明しましたが、あまり具体的な結果をお見せする余裕がありませんでした。超弦理論でいろいろなゲージ理論を構成する方法や、解析をする上で鍵となるゲージ/重力対応の基本的な考え方は、今村さんのレビューでカバーされていますし、研究会でも説明したので、ここでは弦理論側の解説はあまり踏み込まないことにして、より実用的な話をしたいと思います。

酒井氏との論文 [1, 2] で提案した方法で、ゲージ群が $U(N_c)$ で N_f 個の massless のクォークがいるような QCD を超弦理論の枠内に実現し、ゲージ/重力対応を用いて超重力理論による記述に移ると、メソンの有効理論として、次の作用で表されるような 5 次元の $U(N_f)$ ゲージ理論による記述が自然に導かれることが分かります。

$$S = S_{\text{YM}} + S_{\text{CS}},$$
$$S_{\text{YM}} = \kappa \int d^4x dz \text{Tr} \left(\frac{1}{2} K^{-1/3} F_{\mu\nu}^2 + K F_{\mu z}^2 \right), \quad S_{\text{CS}} = \frac{N_c}{24\pi^2} \int \omega_5(A). \quad (1)$$

ここで x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) が我々の住む 4 次元方向で、 z が余剰次元方向の座標です。 κ は 't Hooft coupling λ とカラーの数 N_c とで $\kappa = \lambda N_c / (216\pi^3)$ のように書かれる定数、 K は $K(z) = 1 + z^2$ で与えられる関数、 $\omega_5(A)$ は Chern-Simons 5 form で、具体的には

$$\omega_5(A) = \text{Tr} \left(AF^2 - \frac{1}{2} A^3 F + \frac{1}{10} A^5 \right), \quad (2)$$

で与えられます。² この理論には質量次元を持つパラメータ M_{KK} が一つありますが、今は $M_{\text{KK}} = 1$ となる単位系で考えています。

実際のところ (1) の作用さえ認めてしまえば、あとは超弦理論やゲージ/重力対応のことは忘れてしまっても、ほとんど大丈夫です。この会議録では、この作用の導出は省略し、この単純な作用を出発点とするとどんな結果が引き出せるのかについて主に説明したいと思います。

また、(1) の作用は橘さんがレビューしてくださった、ボトムアップ的なアプローチ [3] で提案された 5 次元記述の一種とみなすことができるので、橘さんのレビューと共通する部分も多いと思います。今村さんのレビュー、橘さんのレビューと見比べつつ、そして、私が講演で用いたスライドを参照しながら読んで頂けたら、分かり易いのではないかと思います。

¹e-mail address: sugimoto@eken.phys.nagoya-u.ac.jp

²これは微分形式を用いた記法で、例えば AF^2 は $A \wedge F \wedge F$ の意味。

2 具体的な解析の要点

2.1 5次元ゲージ理論 ⇒ 4次元のメソンの有効理論

5次元のゲージ理論から4次元のメソンの有効理論を書き下すには、5次元のゲージ場を

$$A_\mu(x^\mu, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_\mu^{(n)}(x^\mu) \psi_n(z), \quad (3)$$

$$A_z(x^\mu, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(x^\mu) \phi_n(z), \quad (4)$$

のように z の関数の完全系 $\{\psi_n(z)\}_{n \geq 1}$ と $\{\phi_n(z)\}_{n \geq 0}$ で展開して、作用 (1) に代入すれば、基本的には準備完了です。ここで出てきた $B_\mu^{(n)}(x^\mu)$ や $\varphi^{(n)}(x^\mu)$ が4次元のメソン場として振舞うというわけです。この完全系の選び方は、どうしても良いのですが、見やすくやるには、 $B_\mu^{(n)}(x^\mu)$ や $\varphi^{(n)}(x^\mu)$ の運動項や質量項が対角的になるように選ぶのが便利です。そうなるような選び方の答えは次のとおりです。まず、 $\psi_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) は

$$-K^{1/3} \partial_z (K \partial_z \psi_n) = \lambda_n \psi_n, \quad (5)$$

という固有方程式の固有関数のなす完全系とします。ここで λ_n は固有値で、 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ のように固有値が小さい順に並べることにします。 $B_\mu^{(n)}$ の運動項を規格化するため、この ψ_n の規格化は

$$\kappa \int dz K^{-1/3} \psi_n \psi_m = \delta_{nm} \quad (6)$$

となるように取ります。また、 $\phi_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) は $\phi_n(z) = \partial_z \psi_n(z)$ と置きます。実はこれだけでは完全系にならず、もう一つ余分に $\phi_0(z) = c/K(z)$ というモードを加える必要があります。ここで c は定数で、 $\varphi^{(0)}$ の運動項が規格化されるように選びます。

このように完全系 $\{\psi_n(z)\}_{n \geq 1}$, $\{\phi_n(z)\}_{n \geq 0}$ を選んで、展開式 (3), (4) を作用 (1) に代入すると、

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \int d^4x \operatorname{Tr} \left[\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^{(n)2} + \lambda_n \left(B_\mu^{(n)} - \partial_\mu \varphi^{(n)} \right)^2 \right] + \int d^4x \operatorname{Tr} \left[(\partial_\mu \varphi^{(0)})^2 \right] + (\text{相互作用項}) \quad (7)$$

を得ます。ここで $F_{\mu\nu}^{(n)} = \partial_\mu B_\nu^{(n)} - \partial_\nu B_\mu^{(n)}$ です。これを見ると、 $\varphi^{(0)}$ は massless なスカラー場で、ベクトル場 $B_\mu^{(n)}$ は $\varphi^{(n)}$ を吸って massive になり、その質量の二乗は固有方程式 (5) の固有値 λ_n で与えられることが分かります。ここでは、相互作用項は省略しましたが、(5) の固有関数 ψ_n さえ求まれば、すべて計算することができます。このように4次元の場で書き直した作用は、無限個のメソンが複雑に相互作用する系になっています。これを5次元で書くと (1) のようにたった一行ですっきりきれいに書いてしまうというところがすごいところです。これがどのくらい現実の QCD と良く合うのかを確かめていく作業をこれからやっていくことにしましょう。

2.2 外場を入れる

1節で、(1) さえ認めてもらえれば、ほとんど大丈夫と言いましたが、実は、もう一つだけ、超弦理論を用いた QCD の具体的な構成の仕方を使わないと説明できないため、ここでは認めてもらいたいことがあります。それは、QCD のカイラル対称性 $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ が $z \rightarrow \pm\infty$ におけるゲージ対称性とみなせるという事実です。(1) には5次元の $U(N_f)$ のゲージ対称性がありますが、そのゲージ変換を与える関数 $g(x^\mu, z) \in U(N_f)$ が与えられたとき、

$$g_\pm(x^\mu) \equiv \lim_{z \rightarrow \pm\infty} g(x^\mu, z) \quad (8)$$

と置くと、 (g_+, g_-) はカイラル対称性 $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ の元とみなせるという意味です。

QCD でカイラル対称性 $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ はグローバル対称性ですが、(8) のように $g_{\pm}$ は x^{μ} 依存性を持たせることができるため、 $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ をゲージ化したものを考えることができます。そうすると、 $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ に対応したゲージ場 $(A_{+\mu}, A_{-\mu})$ は、 (g_+, g_-) でゲージ変換する場なので、自然に

$$A_{\pm\mu}(x^{\mu}) \equiv \lim_{z \rightarrow \pm\infty} A_{\mu}(x^{\mu}, z) \quad (9)$$

のようにして導入することができます。

2.1 節では、暗黙のうちに $z \rightarrow \pm\infty$ でゼロになるような場の配位のみを考えていたのですが、 $A_{\pm\mu}(x^{\mu})$ を入れたい場合は (9) を満たすように、(3) を

$$A_{\mu}(x^{\mu}, z) = A_{+\mu}(x^{\mu}) \psi_+(z) + A_{-\mu}(x^{\mu}) \psi_-(z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{\mu}^{(n)}(x^{\mu}) \psi_n(z), \quad (10)$$

のように変更します。ここで、 $\psi_{\pm}(z)$ は $z \rightarrow \pm\infty$ で 1 になり、 $z \rightarrow \mp\infty$ で 0 になるような関数です。この $\psi_{\pm}$ の選び方も、基本的にどうしても $B_{\mu}^{(n)}$ の場の再定義で移りあえるので、勝手に取って良いのですが、賢い取り方を後で紹介します。

後は、2.1 節でやったように、(10) と (4) を作用 (1) に代入すれば、 $A_{\pm\mu}(x^{\mu})$ を含んだ相互作用も読み取れることとなります。ここで、一つ注意しなければいけないことは、このようにして得られた 4 次元の作用で $A_{\pm\mu}(x^{\mu})$ の運動項を見ると、その係数が発散しているということです。これは、 $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ に関する gauge coupling がゼロになっていることを意味し、もともと $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ が QCD のグローバル対称性であったことを反映しています。したがって、今後 $A_{\pm\mu}(x^{\mu})$ はあくまで外場として取り扱い、 $A_{\pm\mu}(x^{\mu})$ とメソンとの相互作用項を読み取るだけの目的で使うことにします。この操作は、しばしば“怪しい”と思われてしまっているのですが、メソンの有効作用が与えられたときに、外場 $A_{\pm\mu}(x^{\mu})$ との相互作用を読み取るためにカイラル対称性をゲージ化するという、古くから広く用いられているトリックと同じことをやっているに過ぎません。特に、これを使うと、電磁場とメソンとの相互作用を $A_{+\mu} = A_{-\mu} = eQ A_{\mu}^{\text{em}}$ のように置くことで読み取ることができます。ここで、 A_{μ}^{em} が電磁ポテンシャル、 Q はクォークの電荷を表す行列で、例えば $N_f = 2$ の場合は $Q = \text{diag}(2/3, -1/3)$ です。

3 主な結果

3.1 使用上の注意

さて、準備が整ったので、これから、我々の論文 [1, 2] で得られた主な結果を説明しますが、その前に、いくつか注意事項があります。

まず、このモデルには 2 つのパラメータ M_{KK} と $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N_c$ があつたことを思い出しましょう。 M_{KK} は Kaluza-Klein mass scale を与え、 λ は 't Hooft coupling に対応します。このモデルは、その構成のしかたから、 M_{KK} よりも十分低いエネルギースケールで 4 次元の QCD に近くなり、エネルギーが M_{KK} を超えるとだんだん 4 次元の QCD というよりは、5 次元的なゲージ理論になっていくことが分かります。そういう意味で、 M_{KK} はこのモデルの cut-off scale と見なすことができ、エネルギーが M_{KK} よりも十分小さいところで信頼できる記述になっていると考えます。

一方、 g_{YM} は、bare な結合定数なので、 λ は cut-off M_{KK} での 't Hooft coupling と見なせます。今、超重力理論による記述が信頼できる良い近似になっているのは、 $N_c \gg 1$ と $\lambda \gg 1$ のときであることが知られています。 $1/N_c$ や $1/\lambda$ の展開は弦理論の言葉で言うと、弦のループ展開と α' 展開に対応し、一般にその補正項を計算するのは技術的に大変難しい問題です。我々の解析ではそのような

補正項は無視しているので、 $1/N_c$ や $1/\lambda$ の補正項はどこにでも出うるということを覚悟しなければいけません。

この M_{KK} と λ は格子 QCD の言葉で言うと、格子間隔（の逆数）と格子上の裸の結合定数に相当するもので、本来は連続極限に相当する $M_{KK} \rightarrow \infty$ の limit を取るべきものです。その時、メソンの質量などの物理量が有限に保たれるように結合定数 λ を調節する必要がありますが、実はここに問題があります。今のところ、メソンの質量の λ 依存性が $1/\lambda$ 展開の leading の部分しか求まっていないため、この極限がうまく取れないのです。実際、これからメソンの質量の計算結果をお見せしますが、 ρ メソンの質量 m_ρ の $1/\lambda$ 展開の leading の部分は単に定数で、 $m_\rho^2 \simeq 0.67 M_{KK}^2$ のように与えられるため、これを実験値に固定しつつ $M_{KK} \rightarrow \infty$ に取るなんてことは、今の計算の範囲内ではできません。それで、 $1/\lambda$ の補正項をどんどん計算すれば、原理的にはそういうことができるようになるはずであると期待したいところですが、漸近自由性のために M_{KK} を大きくするのに伴って λ は小さくなっていくはずなので、いずれ $1/\lambda$ 展開は役に立たなくなります。できることなら $1/\lambda$ 展開に頼らない計算をして、 λ が小さい領域までつなげたいところですが、それをするには超重力理論による近似を超えてフルに弦理論の解析をする必要があるため、現在のところなかなか手の出ない難しい問題になります。これは、こうしたアプローチの最大の悩みとも言える問題で、今後の研究に期待したいところです。

今の状況を格子 QCD とのアナロジーで言うと、格子間隔を一つの値に固定して強結合展開の leading を計算しているようなもので、本来、連続極限を取りたいところだけど、それを実行できる計算をするための大型計算機がまだ建設中で使えないというような状況に似ているとも言えるでしょう。計算の精度で言えば、まだまだこのアプローチは格子 QCD の精密な計算には及びませんが、優れている点を挙げるとすると、ローレンツ対称性やカイラル対称性が明白であること、メソンの有効作用を書き下すことができ、解析的な計算で様々なことがいえることなどが挙げられると思います。また、このモデルでは M_{KK} 以上のエネルギーはとれないわけではなく、このくらいのスケールから徐々に QCD にはない人工物が寄与し始めるという感じなので、“cut-off” の影響は格子 QCD よりもマイルドだと言えます。

また、(1) を導く際に $N_f \ll N_c$ という仮定をしたのですが、これは弦のファインマングラフで穴があいているグラフを無視することを意味しており、QCD の言葉では、クォークのループを含むグラフを無視していることに相当します。つまり、格子 QCD でしばしば用いられるクエンチ近似に相当するものです。これからやる $N_f = 2$, $N_c = 3$ の場合で、この近似がどこまで有効に働くのかについても、きちんとした議論があるわけではないので、 N_f/N_c の補正はどこにでもありうるということを覚悟すべきです。ただし、格子 QCD のときにクエンチ近似がかなりうまく行っていた経験から、このような荒っぽいことをしてもそれなりに良い近似になっていることを期待することはできます。

もう一つ、今のモデルではクォークの質量がゼロである場合しか取り扱えていないので、重いクォークを含む物理を考えることはできません。そういう訳で、これからは $N_f = 2$ としてアップクォークとダウンクォークのみを含む場合を考えることにします。そして、考える物理量も、クォークの質量にあまり依存しないような物理量しか良い精度では求まらないことに注意すべきです。例えば、後で見るように、パイオンの質量はゼロになってしまい、実験値 ($\simeq 140$ MeV) は全く再現できません。ただし、この場合は、クォークが massless であるような QCD ではパイオンの質量がゼロになるという良く知られた事実を正しく再現したとポジティブに見るべきでしょう。

いろいろ言いましたが、このように、現実の QCD を考える立場からするととても荒っぽい解析をしているので、これに基づいて定量的な予言をしたとしても、あまりその数値にこだわるべきではないでしょう。とりあえず、実験値とオーダーが合う程度の一致が見られれば、第一段階としては成功だと思ふべきだと思います。ところが、実際にやってみると、現実の QCD の特徴を非常にうまく捉えており、定量的にも、様々なメソンの質量や結合定数などがだいたい 20 ~ 30% に収まるくらいの精度で実験値とかなり良く合っていることが分かります。補正項を評価せずに、個々の数値がどのくらいの精度で合うかということを議論することはあまり意味がありませんが、全体としてこれだけ合っ

てしまうと、全てが偶然と切って捨てるわけにはいかなくなると思います。恐らく、補正項があまり大きくなならない何らかの理由があるのだと想像されますが、それが何なのかはまだ良く分かりません。

これからいろいろな結果を紹介しますが、ゲージ/重力対応という、伝統的な場の理論の方法とは全く異なる新しい考え方を現実の QCD に応用する上での初めての取っ掛かりを掴む試みと思って、多少眉に唾をつけつつも温かい目で見えていただけたらと思います。

3.2 メソンのスペクトル

4次元の作用 (7) を見ると、massless のスカラー場 $\varphi^{(0)}(x^\mu)$ と無限個の massive ベクトル場 $B_\mu^{(n)}(x^\mu)$ がいることが分かります。その物理的な解釈ですが、まず、 $\varphi^{(0)}(x^\mu)$ はパイオンと解釈します。パイオンはクォークが massless の時には massless になるので、 $\varphi^{(0)}(x^\mu)$ が massless であることとうまく合っています。そして、 $B_\mu^{(1)}$ は一番軽いベクトルメソンである ρ メソン、 $B_\mu^{(2)}$ は軸性ベクトルメソンである a_1 メソンという具合に解釈します。ここでは詳細は省きますが、パリティや荷電共役に関する変換性も調べることができて、 $\varphi^{(0)}$ は $J^{PC} = 0^{-+}$ の擬スカラー場、 $B_\mu^{(2n-1)}$ は $J^{PC} = 1^{--}$ のベクトル場、 $B_\mu^{(2n)}$ は $J^{PC} = 1^{++}$ の軸性ベクトル場であることが分かります、この解釈とうまいこと合っています。

ここまでくると、これらのメソンの質量がどうなるのかが気になってきますね。2.1 節で見たように、質量を求めるには (5) の固有値を求めれば良いわけです。これを Mathematica などを使って数値計算で求めると、次の表のようになります。

	ρ	a_1	ρ'	(a_1')	ρ''
実験値 (MeV)	776	1230	1465	(1640)	1720
our model	[776]	1189	1607	2023	2435

ここで、上の段が実験値、下の段が我々のモデルの予言値です。³ 今、 M_{KK} の値を ρ メソンの質量で合わせて、 $M_{KK} \simeq 949$ MeV としています。これを見ると分かるように、 ρ と a_1 の質量比はちよつと合い過ぎと言えるくらい良く合っています。質量が重くなるほど、実験と予言の一致は悪くなりますが、それでも、近似の荒っぽさからすると、予想外にうまく合っていると思います。また、我々のモデルは質量の軽い順に並べると、ベクトルメソンと軸性ベクトルメソンが交互に現れることを予言しますが、現実のメソンの表を見ると、確かに ρ と名のつくベクトルメソンと a_1 と名のつく軸性ベクトルメソンが交互に並んでいて、このような特徴もうまく捉えていることが分かります。

3.3 カイラル対称性の自発的破れとパイオンの有効作用

QCD では、 $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ のカイラル対称性は自発的に破れ、部分群の $U(N_f)_V$ ($g_+ = g_-$ の部分) に破れることが知られています。この性質は今のモデルでどのように理解できるでしょうか？

実は、カイラル対称性の自発的破れを示すのは非常に簡単です。2.2 節で $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ のカイラル対称性がこのモデルにどのように入っているのかを説明しましたが、仮に $g_+ \neq g_-$ であるような 5 次元のゲージ変換を考えたとしても、(8) から分かるように、 g は z の関数として、一定ではいられなくなります。つまり、 $\partial_z g \neq 0$ です。したがって、 A_z はゲージ変換 $A_z \rightarrow g A_z g^{-1} + g \partial_z g^{-1}$ で、シフトされることになります。これはすなわち、この対称性が自発的に破れていることを意味します。

ところで、カイラル対称性が自発的に破れると、それに伴って、南部-ゴールドストン (NG) ボソンが出てきますが、これがパイオンだと考えられています。3.2 節で、 $\varphi^{(0)}$ がパイオンと解釈しましたが、これは NG ボソンと解釈できるのでしょうか？少々唐突ですが、

$$U(x^\mu) \equiv e^{2i\pi(x^\mu)/f_\pi} \equiv P \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} dz' A_z(x^\mu, z') \right\} \quad (11)$$

³ $a_1'(1640)$ はまだ実験的証拠が薄いそうなので、括弧で括っています。

という量を定義します。これは 5 次元のゲージ変換のもとで、

$$U(x^\mu) \rightarrow g_+ U(x^\mu) g_-^{-1} \quad (12)$$

のように変換します。これはまさしく、カイラル対称性を尊重したパイオンの有効作用を書くときに
出てくるパイオン場と同じ変換性をするので、パイオン場と解釈したくなります。3.2 節で、出てきた $\varphi^{(0)}$ も A_z の自由度から来たもので、また (4) の展開式で $\phi_n = \partial_z \psi_n$ ($n = 1, 2, \dots$) であることを思い出すと、 $\int dz A_z \propto \varphi^{(0)}$ であることも分かるので、ここで出てきたパイオン場 $\pi(x^\mu)$ は、先の $\varphi^{(0)}(x^\mu)$ と基本的に同じ自由度を担うものと理解できます。

この (11) で定義されるパイオン場を用いてパイオンの有効作用を書き下すには、次のようにします。まず、 $A_z = 0$ になるようにゲージを取ると便利なので、 $g^{-1}(x^\mu, z) = P \exp \left\{ - \int_{-\infty}^z dz' A_z(x^\mu, z') \right\}$ を用いてゲージ変換します。

$$A_M \rightarrow A_M^g \equiv g A_M g^{-1} + g \partial_M g^{-1}, \quad (M = 0 \sim 3, z) \quad (13)$$

こうしておくと $A_z^g = 0$ となりますが、 $z \rightarrow \infty$ で $g^{-1} \rightarrow U$ となることから、

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} A_\mu^g(x^\mu, z) = A_{+\mu}^{U^{-1}}(x^\mu) \quad (14)$$

のように、境界条件にパイオン場 U の依存性が生じます。これを満たすべく、(10) の展開式を

$$A_\mu^g(x^\mu, z) = A_{+\mu}^{U^{-1}}(x^\mu) \psi_+(z) + A_{-\mu}(x^\mu) \psi_-(z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_\mu^{(n)}(x^\mu) \psi_n(z), \quad (15)$$

として 5 次元の作用 (1) に代入すれば、パイオン場 U を含む有効作用の出来上がりです。(ここで、実際の計算は $\psi_\pm(z) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{2}{\pi} \arctan z \right)$ とすると $\partial \psi_\pm \propto \phi_0$ となって便利です。) パイオンのみを含む部分を抜き出すと、

$$S_{\text{YM}} \simeq \int d^4 x \left[\frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(U^{-1} \partial_\mu U)^2 + \frac{1}{32e_S^2} \text{Tr}[U^{-1} \partial_\mu U, U^{-1} \partial_\nu U]^2 \right] + \dots \quad (16)$$

のような形になることが簡単に示せます。ここで、係数は $f_\pi^2 = 4\kappa/\pi$, $e_S^{-2} \simeq 2.51 \cdot \kappa$ のように求まります。これはまさしく Skyrme モデルと呼ばれるモデルの作用です。第一項はカイラル対称性から微分が 2 つある項はこの形になることを知っているの、この形で出てきて当然な項です。第二項は Skyrme 項と呼ばれる項で、この部分は $N_f = 2, 3$ のときには⁴

$$P_1 = \left[\text{Tr}(\partial_\mu U^{-1} \partial^\mu U) \right]^2, \quad P_2 = \text{Tr}(\partial_\mu U^{-1} \partial_\nu U) \text{Tr}(\partial^\mu U^{-1} \partial^\nu U), \quad P_3 = \text{Tr}(\partial_\mu U^{-1} \partial^\mu U \partial_\nu U^{-1} \partial^\nu U) \quad (17)$$

を使って、

$$\frac{1}{32e_S^2} \text{Tr}[U^{-1} \partial_\mu U, U^{-1} \partial_\nu U]^2 = L_1 P_1 + L_2 P_2 + L_3 P_3 \quad (18)$$

のように書くことができます。ここで、 $L_1 = 1/(32e_S^2)$, $L_2 = 1/(16e_S^2)$, $L_3 = -3/(16e_S^2)$ です。パイオン崩壊定数 f_π が実験値 $f_\pi \simeq 92.4 \text{ MeV}$ に合うように $\kappa \simeq 7.45 \times 10^{-3}$ とした場合のこれら量の値を実験値と比較したのが次の表です。

	L_1	L_2	L_3
実験値 ($\times 10^{-3}$)	0.4 ± 0.3	1.4 ± 0.3	-3.5 ± 1.1
our model	0.584	1.17	-3.51

(19)

実験値の誤差が大きいです、これもまた良く合っていると言えるのではないのでしょうか。

⁴ $N_f = 2$ のときには、 P_1 と P_3 は独立ではなく、 $P_3 = P_1/2$ という関係が成り立ちます。

3.4 Vector meson dominance

次に、ベクトルメソンを含む相互作用を調べてみましょう。今度は (4) と (10) を (1) に入れてやってみます。ここで、カイラル対称性は明白に見えなくなるけれど、 $\varphi^{(0)}(x^\mu) = -i\pi(x^\mu)$ と書き、 $\varphi^{(n)}$ ($n \geq 1$) はゲージ変換によって消してしまうと簡単です。また、 $\psi_+(z)$ ($\psi_-(z)$) は $z < z_0$ ($z > z_0$) ではずっとゼロであるような関数を考え、最終的に $z_0 \rightarrow \infty$ ($z_0 \rightarrow -\infty$) に飛ばす操作で生き残る項だけを拾う操作をすると、相互作用の形がシンプルになった有効作用を得る事ができます。全部書くと長いので、これからの話に必要な部分だけ書くと、(7) のような運動項、質量項に加えて、

$$S_{\text{YM}} \simeq \int d^4x \text{Tr} \left[\cdots - 2 f_\pi \partial_\mu \pi \mathcal{A}^\mu - 2 g_{\rho^n} B_\mu^{(2n-1)} \mathcal{V}^\mu - 2 g_{a^n} B_\mu^{(2n)} \mathcal{A}^\mu \right. \\ \left. + 2 g_{\rho^n \pi \pi} B_\mu^{(2n-1)} [\pi, \partial^\mu \pi] + \cdots \right] \quad (20)$$

のような項があることが分かります。ここで、 $\mathcal{V}_\mu = \frac{1}{2}(A_{+\mu} + A_{-\mu})$, $\mathcal{A}_\mu = \frac{1}{2}(A_{+\mu} - A_{-\mu})$ とし、結合定数は

$$g_{\rho^n \pi \pi} \equiv \frac{1}{\pi} \int dz K^{-1} \psi_{2n-1}, \quad g_{\rho^n} \equiv -2\kappa (K \partial_z \psi_{2n-1}) \Big|_{z=+\infty}, \quad g_{a^n} \equiv -2\kappa (K \partial_z \psi_{2n}) \Big|_{z=+\infty} \quad (21)$$

のように、とにかく (5) の固有関数 $\psi_n(z)$ さえ求まれば計算できる形で与えられます。

ここで注目すべきことは、外場 $A_{\pm\mu}$ とメソンの相互作用は (20) の一行目にしか現れないということです。そうすると、特に電磁場とメソンの相互作用は必ずベクトルメソン $B_\mu^{(2n-1)}$ が媒介するということになります。実は、これは Vector meson dominance (VMD) と呼ばれ、その昔、そういうことを仮定すると実験と良く合うということで現象論的に導入された性質です。今のモデルでは、QCD を超弦理論の枠内に構成すると、自動的にこの性質を再現することが示されるわけです。ただし、昔の VMD では、主に ρ メソン (と ω メソン) を考えていましたが、今はこれを無限個のベクトルメソンを含むように拡張した形になっています。

3.5 KSRF relation

(20) の 2 行目に ρ - π - π の 3 点の相互作用がありますが、 $\psi_1(z)$ を数値的に求めて $g_{\rho\pi\pi} = g_{\rho^1\pi\pi}$ を評価すると、 $g_{\rho\pi\pi} \simeq 0.415 \cdot \kappa^{-1/2}$ となります。ここで $g_{\rho\pi\pi} f_\pi / m_\rho$ という組み合わせを考えると、 κ や M_{KK} によらない単なる定数になり、

$$\frac{2g_{\rho^n\pi\pi}^2 f_\pi^2}{m_{\rho^n}^2} \simeq 0.654 \quad (22)$$

という値になります。これの実験値は 1.02 で、そこそこ合っているという感じでしょうか。ちなみに、これが 1 になるという式が河原林-鈴木-Riazuddin-Fayyazddin (KSRF) 関係式と呼ばれる関係式です。実験値と比べて若干小さめに出てしまいましたが、パイオンの 1-loop の寄与を考慮して $1/N_c$ の補正項を評価すると、実験値とうまく合うようになるという議論 [4] もあり、このくらいの値になったことはむしろ喜ばしいことなのかも知れません。

KSRF 関係式にはもう一つあって、それによると $g_\rho g_{\rho\pi\pi} / m_\rho^2 \simeq 1$ を予言します。今のモデルの場合、 $g_\rho = g_{\rho^1}$ を数値的に評価すると、 $g_\rho \simeq 2.11 \cdot \kappa^{1/2} M_{\text{KK}}^2$ となります。 $g_\rho g_{\rho\pi\pi} / m_\rho^2$ という組み合わせはやはり κ や M_{KK} によらない定数になり、

$$\frac{g_\rho g_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2} \simeq 1.31 \quad (23)$$

となります。実験値は 1.20 くらいで、こちらは少し大きめに出てしまいましたが、今の近似の精度からすればやはりとても良く合っているとみなすべきでしょう。

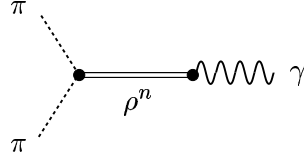


図 1: パイオン形状因子に寄与するファインマングラフ

また、 $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ が完全系をなすことを使うと、KSRF 関係式を拡張した形の

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2g_{\rho^n \pi \pi}^2 f_\pi^2}{m_{\rho^n}^2} = \frac{2}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{\rho^n} g_{\rho^n \pi \pi}}{m_{\rho^n}^2} = 1 \quad (24)$$

という和則を示すことができます。これらの式は、[3] をはじめとする他の現象論的な 5 次元モデルでも成立することが知られており、5 次元的な記述であれば、たいがいのモデルで成立する普遍的な関係式のようにです。

3.6 パイオン形状因子

パイオンの（電磁）形状因子は π - π - γ つなぐファインマングラフから構成されるもので、今のモデルで計算すると、3.4 節で説明した VMD のために図 1 のようにベクトルメソンが間を飛ぶようなグラフを足しあげた形になっていて、

$$F_\pi(k^2) = \sum_{n \geq 1} \frac{g_{\rho^n} g_{\rho^n \pi \pi}}{k^2 + m_{\rho^n}^2} \quad (25)$$

となります。昔の VMD に基く議論では、この無限和のうち $n = 1$ の部分のみで書かれていましたが、これが実験と良く合うことが知られています。さらに、運動量 k が小さいところの展開

$$F_\pi(k^2) \simeq 1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle^{\pi^\pm} k^2 + \dots \quad (26)$$

からパイオンの荷電半径 $\langle r^2 \rangle^{\pi^\pm}$ を求めると、

$$\langle r^2 \rangle^{\pi^\pm} = 6 \sum_{n \geq 1} \frac{g_{\rho^n} g_{\rho^n \pi \pi}}{m_{\rho^n}^4} \simeq 11.0 \cdot M_{\text{KK}}^{-2} \simeq (0.690 \text{ fm})^2 \quad (27)$$

となります。ここで、数値は M_{KK} に ρ メソンの質量であわせた値を入れて評価しました。一方、実験値は $\langle r^2 \rangle^{\pi^\pm} \simeq (0.672 \text{ fm})^2$ なので、これも合い過ぎなくらい合っています。

3.7 カイラルアノマリーと Wess-Zumino-Witten 項

2.2 節でカイラル対称性をゲージ化して、対応するゲージ場 $A_{\pm\mu}$ を外場として導入する話をしましたが、これにはアノマリーがあります。実際、QCD の有効作用 Γ_{QCD} でカイラル対称性に関する微小ゲージ変換 $\delta_\Lambda A_{\pm\mu} = \partial_\mu \Lambda_\pm + [A_{\pm\mu}, \Lambda_\pm]$ を施すと、

$$\delta_\Lambda \Gamma_{\text{QCD}} = \frac{N_c}{24\pi^2} \int_{M^4} \left(\omega_4^1(\Lambda_+, A_+) - \omega_4^1(\Lambda_-, A_-) \right) \quad (28)$$

のようなアノマリーが生じることが知られています。ここで、

$$\omega_4^1(\Lambda, A) \equiv \text{Tr} \left[\Lambda d \left(AdA + \frac{1}{2} A^3 \right) \right] \quad (29)$$

です。このアノマリーは、今のモデルでは (1) にある Chern-Simons (CS) 項 S_{CS} からいとも簡単に導けます。実際、5次元の微小ゲージ変換のもとで $\delta_\Lambda \omega_5(A) = d\omega_4^1(\Lambda, A)$ という公式が成立することを使って、ストークスの定理を使ってやれば、 $z = \pm\infty$ の境界での積分で書けて

$$\begin{aligned}\delta_\Lambda S_{\text{CS}} &= \frac{N_c}{24\pi^2} \int_{M^4 \times \mathbf{R}} d\omega_4^1(\Lambda, A) \\ &= \frac{N_c}{24\pi^2} \int_{M^4} \left(\omega_4^1(\Lambda, A) \Big|_{z=+\infty} - \omega_4^1(\Lambda, A) \Big|_{z=-\infty} \right)\end{aligned}\quad (30)$$

となります。あとは (9) を用いれば、これは (28) そのものです。

さらに、(15) を (1) の S_{CS} に代入して整理すると、多少面倒ですが、単純計算で

$$S_{\text{CS}} \simeq -\frac{N_c}{48\pi^2} \int_{M^4} Z - \frac{N_c}{240\pi^2} \int_{M^4 \times \mathbf{R}} \text{Tr}(gdg^{-1})^5 + (B_\mu^{(n)} \text{を含む項}) \quad (31)$$

という式を得ます。ここで、

$$\begin{aligned}Z &= \text{Tr}[(A_- dA_- + dA_- A_- + A_-^3)(U^{-1}A_+U + U^{-1}dU) - \text{p.c.}] \\ &\quad + \text{Tr}[dA_- dU^{-1}A_+U - \text{p.c.}] + \text{Tr}[A_- (dU^{-1}U)^3 - \text{p.c.}] \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Tr}[(A_- dU^{-1}U)^2 - \text{p.c.}] + \text{Tr}[UA_- U^{-1}A_+ dU dU^{-1} - \text{p.c.}] \\ &\quad - \text{Tr}[A_- dU^{-1}UA_- U^{-1}A_+U - \text{p.c.}] + \frac{1}{2} \text{Tr}[(A_- U^{-1}A_+U)^2] .\end{aligned}\quad (32)$$

これはまさに、教科書に載っている Wess-Zumino-Witten 項そのものです。ここで、少し面白いのは (31) の第二項で、この項の 5次元積分は昔は形式的に導入されたものでしたが、今は出発点から 5次元的で、Dブレーンの広がっている方向としての物理的な実体を与えられているところです。

3.8 ω メソンの崩壊

今まで、「 $B_\mu^{(1)}$ は ρ メソン」という言い方をしていましたが、 $B_\mu^{(1)}$ には $U(1)$ パートもあって、これが ω メソンに対応します。この崩壊過程 $\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$ と $\omega \rightarrow \pi^0 \pi^+ \pi^-$ についても、大変面白いことが言えます。これらの崩壊過程は、CS 項から出てくる相互作用が関与するのですが、今度は 3.4 節でやったやり方で CS 項を計算すると、

$$S_{\text{CS}} \simeq \frac{N_c}{4\pi^2 f_\pi^2} \int_{M^4} \text{Tr} \left[\pi dB^{(n)} dB^{(m)} c_{nm} + \dots \right] \quad (33)$$

のような相互作用項を得ます。ここで、結合定数 c_{nm} は

$$c_{nm} = \frac{1}{\pi} \int dz K^{-1} \psi_n \psi_m \quad (34)$$

で与えられます。特徴的なことを言うと、CS 項でも $A_\pm$ との相互作用は消え失せ、完全な VMD が言えること、それからパイオン場 $\pi(x^\mu)$ を 2 つ以上含む項は出てこないことが挙げられます。後者はパイオン場が A_z にのみ入っていて、CS 項には A_z が 2 個以上出てくる項が存在しないことから言えます。従って、 ω - π - γ や ω - π - π - π のような相互作用項が存在しないことになります。

そうすると、今問題にしている ω メソンの崩壊過程は (33) から読み取れる π - ω - ρ の相互作用を用いて ρ メソンを介する 図 2 のようなグラフでのみ生じることが分かります。実は、これはその昔、Gell-Mann、Sharp、Wagner という人たちが 1962 年に提案したモデルに出てくるグラフそのものです。彼らは、 ω メソンの崩壊がこういうグラフで起こっているとすると実験と良く合うということで現象論的に提案したのですが、これを自然に再現したというわけです。無限個のベクトルメソンが関

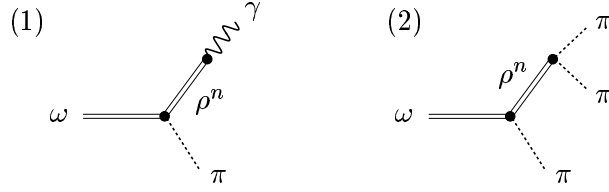


図 2: (1) $\omega \rightarrow \pi\gamma$, (2) $\omega \rightarrow \pi\pi\pi$ に寄与するグラフ

与しているところは昔と違いますが、基本的な構造は全く同じです。さらに、 $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$ の崩壊幅を見ると、

$$\Gamma(\omega \rightarrow \pi^0\gamma) = \frac{N_c^2}{3} \frac{\alpha}{64\pi^4 f_\pi^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{1,2n-1} g_{\rho^n}}{m_{\rho^n}^2} \right)^2 |\mathbf{p}_\pi|^3 = \frac{N_c^2}{3} \frac{\alpha}{64\pi^4 f_\pi^2} g_{\rho\pi\pi}^2 |\mathbf{p}_\pi|^3 \quad (35)$$

のように評価されます。ここで、 ψ_n が完全系であることを使うと示せる

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{1,2n-1} g_{\rho^n}}{m_{\rho^n}^2} = g_{\rho\pi\pi} \quad (36)$$

という和則を使いました。細かい係数はどうでも良いのですが、 $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$ の崩壊幅なのに $g_{\rho\pi\pi}$ が現れたのが面白いところです。しかも、実はこの式は 1985 年に藤原、九後、寺尾、上原、山脇という人たちが hidden local symmetry に基く有効作用を用いて、実験とうまく合うパラメータの選び方を取ることで導いた式をまさに再現しています。

3.9 その他の話題

ページ数の都合で詳しく紹介できませんが、この他にもいろいろなことが言えます。例えば、

- $U(1)_A$ 対称性のアノマリーも超重力理論を用いて理解することができます。また、その効果を取り入れることで η' メソンの質量が Witten-Veneziano 公式に従うことが分かります。
- バリオンも構成できます。バリオンは Skyrme モデル (16) のソリトン (Skyrmion)、5 次元ゲージ理論 (1) の空間方向の 4 次元空間におけるインスタントン、 S^4 に巻きついた D4 ブレインという 3 通りの記述法があり、どれも等価なものを与えます。このモデルに基く Skyrmion 的なアプローチについては古城氏、インスタントンとしての記述に関しては酒井氏による講演を参照してください。
- 有限温度にすることもでき、特に、閉じ込め/非閉じ込めの相転移が起こる温度と同じところで、カイラル対称性が回復することが示されます。このことに関するより詳しい解析は、その後 [5] でなされて、あるパラメータをいじると、閉じ込め/非閉じ込めの相転移温度とカイラル対称性が回復する温度にずれが生じる得ることが指摘されました。

4 おわりに

このように、QCD のホログラフィックな記述は、これまで行われてきた伝統的な QCD の解析法とは全く異なる新しいアプローチであり、摂動計算では決して得られないような様々な物理量が、簡

単な手計算と Mathematica をちょろっと使う程度で手軽にさくさく計算できてしまう驚くべき計算法を提供します。また、様々な結合定数の間に成り立つ関係式を解析的に求めることができる点も、格子 QCD などによる数値計算にはない大きな利点です。

そうした実用的な側面を抜きにしても、この弦理論的なアプローチは QCD の理論的な構造、あるいは場の理論そのものを考え直す上で示唆に富む非常に興味深い枠組みと言えます。ここで本質的な役割を果たしているゲージ/重力対応というのは、4次元のゲージ理論と高次元の曲がった時空における弦理論とが等価であることを主張しています。今の場合、曲がった時空における弦理論の低エネルギー有効理論でメソンを表す部分を抜き出すと (1) の作用で記述される 5次元のゲージ理論が得られるようになっています。ここで現れるハドロンを弦理論の言葉で言うと、メソンは開弦、グルーボールは閉弦、バリオンは D ブレインとして実現されることになります。弦理論はそもそも 1960 年代の終わりにハドロンを表す模型として誕生したのですが、いろいろと困難があったために、その路線では成就せず、結局、ハドロンの理論の基礎理論は QCD ということに落ち着きました。その後、弦理論は量子重力理論や究極の統一理論の候補として認識されるようになるというドラマティックな展開を遂げたのですが、ここへ来て再びハドロンを表す理論として再解釈されることになった訳です。ただし、ここでハドロンを表す弦は D ブレインを含む曲がった時空に住んでいるところが昔の弦理論と違うところです。この議論がすべて正しいとすると、QCD という場の理論とハドロンを表す弦理論は、ゲージ/重力対応という新しいタイプの双対性の関係で結びついた等価な理論であるということになります。つまり、クォークを基本的な自由度と思ってもハドロンを表す弦を基本的な自由度と思っても、理論的な内容は同じであるという訳です。そして、低エネルギー (QCD の強結合) ではハドロンを表す高次元の弦理論が良い記述になり、高エネルギーに行くと 4次元の QCD が良い記述になるという相補的な関係にあります。こうしたことから、このホログラフィックなアプローチは素粒子とは何か? 時空の次元とは何か? という基本的な問に関して、これまでになく新たな見方を提供しているとも言えるでしょう。少し大げさに言えば、このような研究を通じて、今後、究極の素粒子像、時空像に対する我々の伝統的な認識が大きく変えられる可能性をも秘めているのです。

参考文献

- [1] T. Sakai and S. Sugimoto, “Low energy hadron physics in holographic QCD,” Prog. Theor. Phys. **113**, 843 (2005) [arXiv:hep-th/0412141].
- [2] T. Sakai and S. Sugimoto, “More on a holographic dual of QCD,” Prog. Theor. Phys. **114**, 1083 (2006) [arXiv:hep-th/0507073].
- [3] D. T. Son and M. A. Stephanov, “QCD and dimensional deconstruction,” Phys. Rev. D **69**, 065020 (2004) [arXiv:hep-ph/0304182].
- [4] M. Harada, S. Matsuzaki and K. Yamawaki, “Implications of holographic QCD in ChPT with hidden local symmetry,” Phys. Rev. D **74**, 076004 (2006) [arXiv:hep-ph/0603248].
- [5] O. Aharony, J. Sonnenschein and S. Yankielowicz, “A holographic model of deconfinement and chiral symmetry restoration,” Annals Phys. **322**, 1420 (2007) [arXiv:hep-th/0604161].