

Baryons from instantons in holographic QCD

酒井 忠勝¹
茨城大学 理学部

5次元 Yang-Mills 理論に Chern-Simons 項が加わったモデルは、ハドロンの低エネルギー領域の物理を非常にうまく記述することが最近明らかにされ、現在 holographic QCD などと呼ばれている。今回はこのモデルをバリオンに応用し、バリオンの物理を理解する上でも有用であることを見る。特に negative-parity baryon が非常に簡単に記述されることがわかる。

1 はじめに

AdS/CFT 対応 (review としては [1]) が発見されて以来、ゲージ理論の強結合領域の物理を理解する手段として重力理論を用いるアイデアが多くの人々の注意を引いています。弦理論研究者はもちろん、最近ではハドロンの物理の研究者の間でもゲージ理論/弦理論対応の意義が認識されつつあるようで、私のような主に弦理論を研究してきた人間から見ると、驚きと同時に非常に大きな喜びでもあります。

本記事では、ゲージ理論/弦理論対応を QCD へ応用した仕事 [2, 3] に基づき、バリオンの物理をいかに理解するかを議論します。詳しくは [4] を参照して下さい。このモデルは type IIA 超弦理論における 2 種類の D-brane, D4 と D8, を組み合わせることにより提案されたモデルで、その具体的な構成法は杉本氏の記事をご覧ください。このモデルで中心的な役割を果たすのは、以下のゲージ群 $U(N_f)$ の 5次元 Yang-Mills(YM) 理論に Cherns-Simons(CS) 項が加わった系です:

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{YM}} + S_{\text{CS}} \\ S_{\text{YM}} &= -\kappa \int d^4x dz \operatorname{tr} \left[\frac{1}{2} h(z) \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 + k(z) \mathcal{F}_{\mu z}^2 \right] \\ S_{\text{CS}} &= \frac{N_c}{24\pi^2} \int_{M^4 \times \mathbb{R}} \omega_5^{U(N_f)}(\mathcal{A}) = \frac{N_c}{24\pi^2} \int_{M^4 \times \mathbb{R}} \operatorname{tr} \left(\mathcal{A} \mathcal{F}^2 - \frac{i}{2} \mathcal{A}^3 \mathcal{F} - \frac{1}{10} \mathcal{A}^5 \right) \\ \kappa &= \frac{\lambda N_c}{216\pi^3}, \quad \lambda = g_{\text{YM}}^2 N_c, \quad h(z) = (1+z^2)^{-1/3}, \quad k(z) = 1+z^2 \end{aligned} \tag{1}$$

これは、massless quark が結合した large N_c QCD に双対なモデルと考えられており、実際 chiral symmetry の自発的破れなど、QCD において起こるはずの様々な現象がうまく説明できることが知られています。

このモデルを用いてバリオンを記述するために重要なのは、バリオンをある種のソリトンとみなすという、Witten のアイデア [5] です。このアイデアを具体的に実現した例として [6] があります。Skyrme model において baryon number を運ぶソリトン解 (Skyrmion) を構成し、次にそれを量子化することにより、バリオンの実験値をうまく再現することができました。しかしながらこの計算の不満な点として、 ρ メソンなどのベクトルメソンの効果が考慮されていません。一方、[2, 3] のモデルは無限個のベクトルメソンを取り入れたモデルと考えられており、これらがバリオンの物理にどのような寄与を及ぼすか、さらにそれらを考慮することに初めて見えてくる現象があるのかどうか、などを調べるのは非常に興味深いことです。このような動機のもと、[4] ではバリオンの解析を行いました。なお、今回は簡単のため $N_f = 2$ の場合のみ考えます。さらに (1) に表れる $U(2)$ ゲージ場のうち、 $SU(2)$ 部分を A , $U(1)$ 部分を $\hat{A}$ と書くことにします。

¹e-mail address: tsakai@mx.ibaraki.ac.jp

2 バリオン解

結論から述べますと, (1) におけるバリオン解とは instanton number

$$N_B = \frac{1}{32\pi^2} \int d^3x dz \epsilon_{MNPQ} \text{tr}(F_{MN} F_{PQ}), \quad (M, N = 1, 2, 3, z) \quad (2)$$

を運ぶソリトンとして実現されます。これを見るには, S_{CS} の中に,

$$\epsilon_{MNPQ} \int d^4x dz \hat{A}_0 \text{tr}(F_{MN} F_{PQ}), \quad (3)$$

が含まれることに注目します。 $\hat{A}_0(t)$ はバリオン数に付随したゲージ場とみなせることが示せるので, instanton number が確かにバリオン数に等しいことがわかります。

instanton 数を運ぶ (1) のソリトン解を構成するのに,

$$\begin{aligned} \tilde{x}^M &= \lambda^{+1/2} x^M, \quad \tilde{x}^0 = x^0, \\ \tilde{\mathcal{A}}_0(t, \tilde{x}) &= \mathcal{A}_0(t, x), \quad \tilde{\mathcal{A}}_M(t, \tilde{x}) = \lambda^{-1/2} \mathcal{A}_M(t, x), \\ \tilde{\mathcal{F}}_{MN}(t, \tilde{x}) &= \lambda^{-1} \mathcal{F}_{MN}(t, x), \quad \tilde{\mathcal{F}}_{0M}(t, \tilde{x}) = \lambda^{-1/2} \mathcal{F}_{0M}(t, x), \end{aligned} \quad (4)$$

と変数を定義し直し, $\lambda = g_{YM}^2 N_c \gg 1$ としつつ, tilde 付きの変数はオーダー λ^0 の量とみなします。実は (1) の記述が有効なのは, $\lambda \gg 1$ の場合に限られるので, (4) のような操作を通して, $1/\lambda$ 展開を系統的に行うことにします。簡単のため, 今後 tilde は全て無視します。その結果, 運動方程式は,

$$\begin{aligned} D_M F_{0M} + \frac{27\pi}{8} \epsilon_{MNPQ} \hat{F}_{MN} F_{PQ} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) &= 0 \\ D_N F_{MN} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) &= 0 \\ \partial_M \hat{F}_{0M} + \frac{27\pi}{8} \epsilon_{MNPQ} \left\{ \text{tr}(F_{MN} F_{PQ}) + \frac{1}{2} \hat{F}_{MN} \hat{F}_{PQ} \right\} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) &= 0 \\ \partial_N \hat{F}_{MN} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) &= 0 \end{aligned}$$

となり, これより $N_B = 1$ の解としては,

$$\begin{aligned} A_0 &= 0 \text{ (gauge choice)}, \quad A_M = A_M^{\text{BPST}}(x^M) \\ \hat{A}_0 &= \frac{27\pi}{\xi^2} \left[1 - \frac{\rho^4}{(\rho^2 + \xi^2)^2} \right], \quad \hat{A}_M = 0, \quad \left(\xi = \sqrt{(\vec{x} - \vec{X})^2 + (z - Z)^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで, A_M^{BPST} はよく知られた Belavin-Polyakov-Schwats-Tyupkin 型のインスタントン解, $\vec{X}, Z$ はインスタントンの位置, ρ はそのサイズを表します。この解の持つエネルギーは簡単に評価でき,

$$M(\rho, Z) = 8\pi^2 \kappa \left[1 + \lambda^{-1} \left(\frac{\rho^2}{6} + \frac{36\pi}{5} \frac{1}{\rho^2} + \frac{Z^2}{3} \right) + \mathcal{O}(\lambda^{-2}) \right] \quad (6)$$

となります。ここで注目すべきは, 2 項目の $\mathcal{O}(\lambda^{-1})$ の部分です。 ρ^2, Z^2 の項は 5 次元時空の z 方向が曲がっている効果, $1/\rho^2$ の項は (3) のクーロン相互作用によるものです。もしこのクーロン相互作用がないと, 最低エネルギーの解は small instanton $\rho = 0$ で与えられることになります。これは singular な解で, 実際この周りのソリトンの量子化は意味をなしません。クーロン相互作用がインスタントンがつぶれるのを防ぐ役割をはたしており, 興味深いといえます。実際エネルギーが最小になるのは

$$\rho^2 = 27\pi \sqrt{\frac{6}{5}}, \quad Z = 0$$

の場合です。

ここで、上で求めたソリトンの量子化に移る前に、いくつかコメントしたいと思います。我々はバリオンはインスタントンで与えられると主張しました。一方、[6]においては、バリオンはスカーミオンに等しく、特にバリオン数はパイオン場 $U(x) = \exp(2i\pi(x)/f_\pi)$ の持つ winding number と解釈されます。疑問は、この2つの立場はどのように関係するのか、ということです。これに答えるために、(1)においてパイオン場が

$$U(x) = \text{P exp} \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dz A_z(x, z) \right) \quad (7)$$

と与えられることに注意します[2]。実際、 $U(x)$ の有効作用が Skyrme model に一致することを示せます。さらに、バリオン数 N_B は $U(x)$ を用いて

$$N_B = -\frac{1}{24\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \text{tr}(U^{-1} dU) \quad (8)$$

と書き直すことができ、これは[6]の主張に他なりません。さらに、(5),(7)を用いると、バリオン解を表すパイオン場は、

$$U(x) = \text{P exp} \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dz A_z^{\text{BPST}}(x, z) \right) \quad (9)$$

この結果は、[7]による、Skyrmion をインスタントン解で近似できるという主張を、holographic QCD の立場から再現したことになります。特に[7]において人為的に導入された第5方向は、holographic QCD の立場では、単に D-brane の延びる方向の一つとみなせます。

3 ソリトンの量子化

次に上で求めたソリトン解を量子化してバリオンのスペクトラムを求めます。そのために、ソリトンに現れる parameter を時間に依存した変数とみなし、ソリトンの集団運動を記述するラグランジアンを求めるといふ、通常ソリトンの量子化の手法に従います。我々が求めたソリトンは BPST インスタントンであり、したがって、その集団運動は 1-instanton 解の moduli 空間 $\mathcal{M}_1$ 上の量子力学で記述されることになります。よく知られているように、 $\mathcal{M}_1 = \mathbb{R}_4 \times \mathbb{R}_4 / \mathbb{Z}_2$ です。ただし一つ注意すべき点として、集団運動のラグランジアンは、(6) からわかるように、 ρ, Z に対するポテンシャル項を持ちます。この意味で、 ρ と Z は厳密には moduli とは呼べません (ラグランジアンにポテンシャル項が現れず、したがって運動エネルギーのみでその全エネルギーが与えられるのが moduli だから)。それにもかかわらず、ここでは ρ と Z を moduli のように取り扱い、量子化を実行します。

結果だけを述べると、集団運動のハミルトニアンの eigenstate は $|l, n_\rho, n_z\rangle$ で与えられます。ここで、 $l = 1, 3, 5, \dots$ で、この状態は $SU(2)_I \times SU(2)_J$ の $(S_{l/2}, S_{l/2})$ 表現に属します。 $SU(2)_{I,J}$ はそれぞれ isospin, spin 回転の群です。また、 $n_\rho, n_z = 0, 1, 2, \dots$ であり、 ρ, Z の excitation number を表します。ハミルトニアンの固有値は

$$\begin{aligned} M_{l, n_\rho, n_z} &= M_0 + \sqrt{\frac{(l+1)2}{6} + \frac{2}{15}N_c} + \frac{2(n_\rho + n_z) + 2}{\sqrt{6}} \\ &\simeq M_0 + \sqrt{\frac{2}{15}N_c} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{6}\frac{(l+1)2}{N_c}} + \frac{2(n_\rho + n_z) + 2}{\sqrt{6}} \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、 $M_0 = 8\pi^2\kappa + N_c\sqrt{2/15}$ です。

(10) に関していくつかコメントをします。まずこの公式の N_c 依存性は、今まで議論されてきた large N_c QCD のバリオンに関する結果と一致します。[5]において、バリオンを励起することによる質量の

差は $\mathcal{O}(N_c 0)$, 一方バリオンを励起せず spin (または isospin) を変化させると $\mathcal{O}(1/N_c)$ の質量差が生じる, と主張されています。(10) はまさにこの結果を再現しています。さらに興味深い点として, 状態 $|l, n_\rho, n_z\rangle$ は $\text{parity } P = (-1)^{n_z}$ を持ちます。なぜなら, [2] で示されているように, parity 変換は (1) における 5d proper Lorentz 変換 $(\vec{x}, z) \rightarrow -(\vec{x}, z)$ に他ならず, したがって, Z により状態を励起させていくたびに parity が flip します。このようにして, negative-parity バリオンを extra な第 5 方向にソリトンが励起するモードと同一視できました。Skyrme model などの, 有限個のメゾンだけを取り入れた有効理論において $\text{negative-parity baryon}$ を取り扱うのは非常に難しいようです。一方, 我々の 5 次元 YM-CS 理論 (1) には無限個のベクトルメゾンの効果が含まれており, そのおかげで $\text{negative-parity baryon}$ が非常に簡単な方法で記述できるようになりました。

4 実験値との比較

上で得られた結果と実験値との比較をするために, まず状態 $|l, n_\rho, n_z\rangle$ をどのバリオンと同一視するかを決める必要があります。(iso)spin と parity に関する情報をもとに, 我々は次のような辞書を提案しました:

(n_ρ, n_z)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)	(2, 0)/(0, 2)	(2, 1)/(0, 3)	(1, 2)/(3, 0)
$N (l = 1)$	940 ⁺	1440 ⁺	1535 ⁻	1655 ⁻	1710 ⁺ , ?	2090 ⁻ , ?	2100 ⁺ , ?
$\Delta (l = 3)$	1232 ⁺	1600 ⁺	1700 ⁻	1940 ⁻ *	1920 ⁺ , ?	?, ?	?, ?

表に記載されている数値はバリオンの質量の実験値で, * はその存在が実験からは完全には裏付けられていないバリオンの状態であることを意味します。次に, このように対応づけられた状態のエネルギーの値 (10) が実験値とどの程度一致するかを見てみます。以下がその例です:

$$\begin{aligned}
 m_\Delta - m_N &= \begin{cases} M_{l=3, n_\rho=n_z=0} - M_{l=1, n_\rho=n_z=0} \simeq 569\text{MeV} & (\text{our model}) \\ 1232 - 940 = 292\text{MeV} & (\text{experiments}) \end{cases} \\
 m_{N(1440)} - m_N &= \begin{cases} M_{l=1, n_\rho=0, n_z=1} - M_{l=1, n_\rho=n_z=0} \simeq 774\text{MeV} & (\text{our model}) \\ 1440 - 940 = 500\text{MeV} & (\text{experiments}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

ここで, 我々のモデルの input として, ρ メゾンの質量が 776MeV であることを用いました。この結果を見ると, モデル (1) からの予言は, メゾン sector とバリオン sector では完全に consistent とはいかないようで, 残念な結果です。しかしながら, 我々は非常に似た状況を知っています。[6] による Skyrme model の解析において彼らの結果を実験値と一致させるためには, パイオンの崩壊係数を $f_\pi|_{\text{ANW}} = 64.5\text{MeV}$ と選ぶ必要があります。これはもちろん実験値 $f_\pi|_{\text{exp}} = 92.4\text{MeV}$ とは一致しません。

5 まとめ

我々は (1) のモデルに基づきバリオンの物理を調べました。このモデルは低エネルギーのメゾンの物理を議論するには非常に成功したモデルであり, これをバリオンにまで拡張を試みるのは自然な流れです。我々は, バリオン数はインスタントン数に等しいことを示し, 特にバリオン数 1 を持つソリトン解を具体的に構成しました。そして, それは通常の BPST インスタントンに他ならず, その量子化はよく知られた 1-instanton の moduli 空間上の量子力学 (ただしポテンシャル項付き) により行われることがわかりました。このモデルのもっとも著しい結果の一つは, negative-parity バリオンを非常に簡単な方法で記述することが可能なことです。実際, ソリトンが第 5 方向に励起するモードが negative-parity

バリオンを与えることを見ました。これは5次元のYM-CS理論を考えることで初めて可能になったことです。

ソリトンの量子化の結果得られたバリオンの質量と実験値との比較は残念ながらそれほど良い結果に至りませんでした。スカーミオンの時と同様、メゾン sector の予言とバリオン sector の予言を同時に実験値と一致させるのは難しいのかもしれませんが。仮りにそうだとしても、質量公式 (10) の N_c 依存性がこれまで知られていた large N_c QCD におけるバリオンの解析と一致するなど、非常に興味深い結果も得られました。

Holographic QCD がハドロン物理を理解する上で有用な道具立てとして今後確立していくのか、それとも今まで見てきたような実験結果との整合性は単なる偶然で、holographic QCD の枠組は将来用をなさなくなってしまうのか、それは誰にもわかりません。しかし、弦理論による手法が、QCD の非摂動的側面の理解に向けて新たな方向を切り開いたことは確かだと思います。弦理論とハドロン物理の研究者がこの深遠でそしてワクワクするような課題に一緒に取り組みことは、非常に意義のあることといえるでしょう。現在起こっている他分野間の実りある交流がこれからも続くことが期待されます。

参考文献

- [1] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” Phys. Rept. **323**, 183 (2000) [arXiv:hep-th/9905111].
- [2] T. Sakai and S. Sugimoto, “Low energy hadron physics in holographic QCD,” Prog. Theor. Phys. **113**, 843 (2005) [arXiv:hep-th/0412141].
- [3] T. Sakai and S. Sugimoto, “More on a holographic dual of QCD,” Prog. Theor. Phys. **114**, 1083 (2006) [arXiv:hep-th/0507073].
- [4] H. Hata, T. Sakai, S. Sugimoto and S. Yamato, “Baryons from instantons in holographic QCD,” arXiv:hep-th/0701280.
- [5] E. Witten, “Baryons In The 1/N Expansion,” Nucl. Phys. B **160**, 57 (1979).
- [6] G. S. Adkins, C. R. Nappi and E. Witten, “Static Properties Of Nucleons In The Skyrme Model,” Nucl. Phys. B **228**, 552 (1983).
- [7] M. F. Atiyah and N. S. Manton, “SKYRMIONS FROM INSTANTONS,” Phys. Lett. B **222**, 438 (1989).