

Baryon Chemical Potential in AdS/CFT

中村 真¹

Physics Department, Hanyang University, Seoul, 133-791, Korea

強結合ゲージ理論の新たな解析方法である AdS/CFT の枠組みに baryon 化学ポテンシャルを導入することは非常に重要です。最近本格的に始まったこの試みを我々の仕事を踏まえながら概観し、現在理解されていること及び現在の問題点について述べます。

1 背景

QCD の相図における二つの重要なパラメーターは、言うまでも無く温度 T と baryon 化学ポテンシャル μ_B (または baryon 数密度) ですが、baryon 化学ポテンシャルを導入した格子 QCD の計算には虚数問題という困難があることが知られています。AdS/CFT はゲージ理論を 5 次元²の重力理論で記述する理論的枠組みであり、格子 QCD とは全く異なるタイプの非摂動的解析手法です。そこで、この AdS/CFT の枠組みに baryon 化学ポテンシャルを導入することは非常に重要となります。ごく最近まで、AdS/CFT の枠組みに化学ポテンシャルを導入する試みは、超対称ゲージ理論の R-charge³に対する化学ポテンシャルについて行われてきました。この場合、対応する重力側の背景時空は、電荷を持った 5 次元の AdS-ブラックホール (AdS-Reissner-Nordström ブラックホール) で記述されることが判っています。現実の QCD にはもちろん R-charge は存在しませんので、実際の $U(1)_B$ -charge に対する化学ポテンシャルを AdS/CFT に導入することが現在の課題です。昨年夏頃より、この方向での試みが我々の仕事を含めいくつかなされていますが [1, 2, 3, 4]、完全な定式化については今なお議論が続いています。

2 AdS/CFT における baryon 化学ポテンシャル

AdS/CFT 対応で議論される典型的なゲージ理論は $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論ですが、この理論には基本表現のクォークが存在しません。そこで通常は、flavor brane と呼ばれる D-brane を重力理論側に導入することで、クォークをゲージ理論に導入します。酒井・杉本モデルでは D8、anti-D8-brane を用いますが、ここでは D7-brane を N_f 枚挿入する方法 (いわゆる D3-D7 system) を用いてゲージ理論にクォークを導入しました。この結果、ここで議論するゲージ理論は flavor 対称性が $U(N_f)$ の $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論となります。以下、この理論を記述する AdS/CFT の枠組みに baryon 化学ポテンシャルを導入する試みを、我々の仕事 [3] に沿って述べます。

ゲージ理論側での大域的 $U(N_f)$ 対称性は、重力理論側では D7-brane 上の (local な) $U(N_f)$ ゲージ対称性となります。従って、これに対応するゲージ場が重力理論側には存在し、その一部は vector meson の自由度と同定されます。 $U(N_f)$ の $U(1)$ 部分は $U(1)_B$ 対称性と理解されますから、この $U(1)$ 部分に対応する 5 次元可換ゲージ場 A_μ の第ゼロ成分 A_0 に 5 次元時空の境界で期待値を持たせると、それが $U(1)_B$ -charge に対する化学ポテンシャルとなることが想像できます [1, 2]。

まず我々は、化学ポテンシャルの定義を 5 次元時空側でゲージ不変な形に再定義しました：

$$\mu_B = \int_{\rho_{min}}^{\infty} d\rho F_{\rho 0}. \quad (1)$$

¹e-mail address: nakamura@hanyang.ac.kr

²より正確には 5 次元の漸近的に AdS (anti-de Sitter) となる時空と、さらに別個の 5 次元空間の直積から成る 10 次元空間です。

³理論の supercharge どうしを回転させる対称性の charge です。

ここで、 ρ は D7-brane 上の 5 番目の時空方向であり、右辺では 5 次元可換ゲージ場の field strength $F_{\rho 0}$ を D7-brane の中心 ($\rho = \rho_{min}$) から時空の境界 ($\rho = \infty$) まで積分しています。このように定義すると、化学ポテンシャルは、電場 $F_{\rho 0}$ に逆らって単位 $U(1)_B$ -charge を時空の境界から D7-brane の中心まで持ち込むのに必要な仕事、として理解することも出来るようになります。

さらに、 $U(1)$ ゲージ場の存在する D7-brane の Lagrangian から、Legendere 変換を用いて Hamiltonian を構成する重力理論側での操作は、4 次元ゲージ理論の言葉ではグランドポテンシャル Ω から Helmholtz 自由エネルギー F を得る Legendere 変換に対応することを指摘しました。つまり重力理論の picture では、ゲージ理論の熱力学が D7-brane 上の電磁気の解析力学として表現されることになります。例えば、グランドポテンシャルを μ_B で変分して粒子数 ($U(1)_B$ -charge) を求める式は、重力理論の描像ではちょうどガウスの法則から ($U(1)_B$ の) 電荷を求める式に対応しています。

このようなセットアップを構成した後、D7-brane の運動方程式を解くと、いくつかの異なる解のグループが存在することがわかります。この解のグループを大きく分けると次の 2 種類に分類することができます。

- Minkowski branch (あるいは Minkowski embedding)
時空の境界からブラックホールに向かって延びている D7-brane がブラックホールの horizon に落ち込むことなく懸垂しているような解です。
- Black-hole branch (あるいは Black-hole embedding)
時空の境界からブラックホールに向かって延びている D7-brane がブラックホールの horizon に落ち込んでしまい、horizon に D7-brane が端点を持つような解です。

どちらの branch がより安定になるかは、温度や化学ポテンシャルなどの値に依存します。つまり、温度や化学ポテンシャルを変化させていくと、ある臨界点において最も安定な branch が変化します。その際、一般に自由エネルギーの一階微分が不連続となることが数値的に確認でき、上記の異なる branch 間のジャンプが系の一次相転移に相当することが結論されます。それではこれらの異なる相を特徴付ける性質は何でしょう。一般に、低温では Minkowski branch がより安定となりますが、この相では meson の質量 spectrum (これは D7-brane の振動の spectrum から求めることができます) が離散的になる相で、形式上「閉じ込め相」と呼ばれています。一方で、一般に高温で安定となる black-hole branch では meson の質量 spectrum が連続的となり、mass gap がなくなることが知られており、形式的に「非閉じ込め相」と呼ばれています⁴[5]。

我々はこのような D7-brane 解の振る舞いを数値的に解析することで、 $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論の有限温度・有限 baryon 密度における予備的な相構造を求めました [3]。この「閉じ込め・非閉じ込め」相転移は上述のように基本的に一次相転移であり、臨界温度は baryon 化学ポテンシャル (baryon 数密度) の関数として単調減少することが判明しました。

3 議論と展望

我々は、AdS/CFT の枠組みに $U(1)_B$ 化学ポテンシャルを導入する試みを行い、 $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論の有限温度・有限密度における予備的な相図を得ました。しかしながら我々の論文が発表されたすぐ後に、ほぼ同様の論文が他のグループにより発表され [4]、そこでは、我々が用いた解のうち、「閉じ込め相」に対応する Minkowski branch が有限密度においては非物理的であるという解釈がなされました。これは Minkowski branch に $U(1)$ ゲージ場の source となる quark (重力理論の picture では fundamental string) を導入すると、解が不安定となるという理由によります。しかし、その後の

⁴この用語は、しばしば AdS/CFT の文献にて使われる形式的用語ですが、ここで言う「閉じ込め・非閉じ込め」は例えば Polyakov ループの期待値等から定義される閉じ込め・非閉じ込めとは物理的に異なるものです。従って他により適切な呼び名を作るべきかも知れません。

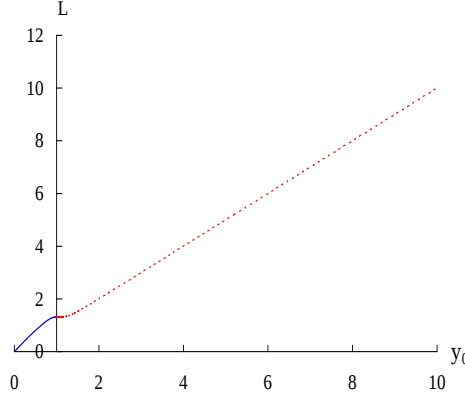


図 1: グランドカノニカルアンサンブルにおける D7-brane 解の構造: L は温度の逆数に比例するパラメータ、 y_0 は D7-brane が最も black hole の horizon に接近する点の座標をあらわすパラメータです。ここでは horizon の位置は $y_0 = 1$ に対応し、 $y_0 \leq 1$ が black-hole branch、 $y_0 > 1$ が Minkowski branch に対応します。もし Minkowski branch (点線部) を捨て去って black-hole branch のみを採用すると、低温領域 (L の大きい領域) を記述できる D7-brane が全く存在しなくなり、理論が不完全になってしまいます。

我々の解析では、Minkowski branch も理論の必要な構成要素であると考えられる側面があらわれ、この問題に関してはまだ論争中です。

例えば Minkowski branch を非物理的として捨て去ってしまうと、グランドカノニカルアンサンブルにおいては理論から低温・低化学ポテンシャル領域が存在しなくなってしまうことが数値的に示されます (図 1)。またその結果、[4] の主張を採用すると、グランドカノニカルアンサンブルにおいては有限密度において相転移が全く存在しなくなるなど、様々な困難が生じます [6]。

$U(1)_B$ 化学ポテンシャルの AdS/CFT への導入に際しては、このようにまだ完全には理解されていない点もありますが、それらを一つずつクリアして、formalism を厳密にしていけることが現在必要とされています。

参考文献

- [1] K-Y. Kim, S-J. Sin and I. Zahed, “Dense Hadronic Matter in Holographic QCD”, hep-th/0608046.
- [2] N. Horigome and Y. Tanii, “Holographic chiral phase transition with chemical potential”, *JHEP* **0701** (2007) 072, hep-th/0608198.
- [3] S. Nakamura, Y. Seo, S-J. Sin and K. P. Yogendran, “A New Phase at Finite Quark Density from AdS/CFT”, hep-th/0611021.
- [4] S. Kobayashi, D. Mateos, S. Matsuura, R. C. Myers and R. M. Thomson, “Holographic phase transitions at finite baryon density”, *JHEP* **0702** (2007) 016, hep-th/0611099.
- [5] 例えば、D. Mateos, R. C. Myers and R. M. Thomson, “Holographic Phase Transitions with Fundamental Matter”, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 091601, hep-th/0605046; T. Albash, V. Filev, C. V. Johnson and A. Kundu, “A Topology-Changing Phase Transition and the Dynamics of Flavour”, hep-th/0605088; A. Karch and A. O’Bannon, “Chiral Transition of $N=4$ Super Yang-Mills with Flavor on a 3-Sphere”, *Phys. Rev.* **D74** (2006) 085033, hep-th/0605120; T. Albash, V. Filev, C. V. Johnson and A. Kundu, “Global Currents, Phase Transitions, and Chiral Symmetry Breaking in Large N_c Gauge Theory”, hep-th/0605175.
- [6] S. Nakamura, Y. Seo, S-J. Sin and K. P. Yogendran, to appear.