AdS/CFT –基本的な考え方とその応用–

今村 洋介[1]
東京大学 大学院 理学系研究科

AdS/CFT 対応は重力とゲージ理論の間の双対性であり、これを用いることでゲージ理論の強結合領域での振る舞いを重力理論を用いて解析することができる。ここではいくつかの基本的な例を用いながら AdS/CFT 対応について解説する。

1 はじめに

弦理論はもともとハドロンの共鳴状態のスペクトル（Regge 軌跡）や振幅の交差対称性（Veneziano 振幅）といった、ハドロン物理における強い相互作用のダイナミクスを記述するために 1960 年代に考案されたものである。高いエネルギーに励起されたメソンは粒子が何か紐のようなもので結ばれた束縛状態とみなすことができ、その紐（QCD string）は QCD のダイナミカルスケール程度の張力 ($T_{\rm str} \sim {\rm GeV}^2$) を持つ。そしてその端点は $SU(3)$ の基本表現および反基本表現に属するクォーク、反クォークとみなされる。

しかしながら、弦理論はその量子化が 10 次元や 26 次元といった高い次元でのみうまく行うことができるという事情のため、ハドロンの物理を記述するための理論としては発展してこなかった。そのかわり、振動モードの基底状態として自然にスピンが 2 の零質量場を含むことから、重力を含む統一理論としての道をたどることになる。

1994 年に Polchinski が D-ブレーンを発見して以後、この状況が大きく変化する。D-ブレーンは 10 次元時空の中である次元の広がりを持ち、弦理論におけるソリトンのようなものと解釈される。D-ブレーンの上にはゲージ理論が住んでおり、このことを利用すると 10 次元時空のなかの $3+1$ 次元の部分空間上にすんでいるようなゲージ理論を構成することができる。それだけではなく、D-ブレーンは質量やチャージを持っており重力を通して背景の時空に影響を与える。この重力とゲージ理論との関係を利用することにより、ゲージ理論の強結合領域を重力を用いて調べることが可能になり、最近では再びハドロン物理の解析にも用いられ始めている。以下では AdS/CFT として知られるゲージ理論と弦理論の間の関係について、いくつかの基本的な例を用いて説明する。

2 弦理論の低エネルギー有効理論

弦理論は弦の振動モードとして現れる無限個の場を含むが、以下の解析で重要なのは弦の基底状態に対応した零質量の場によって記述される低エネルギー有効理論である。以下では閉弦から現れる場と開弦から現れる場についてその低エネルギー有効理論が何であるのかを簡単に説明しておく。

2.1 閉弦のセクター

弦理論には幾つかの種類があるが、ここでは IIB 型超弦理論と呼ばれるものについて考える。これは 10 次元の時空の中で振動する閉じた弦の理論であり、唯一のパラメータとして弦の張力 $T_{\rm str}$ を持っている。この張力は質量の二乗の次元をもち、理論のスケールを決めるパラメータである。$T_{\rm str}$ を用いて次のように定義される α' や l_s もしばしば用いられる。

$$T_{\rm str} = \frac{1}{2\pi\alpha'} = \frac{1}{2\pi l_s^2}. \tag{1}$$

[1] e-mail address: imamura@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

弦の張力は弦の長さによらない定数なので、弦の単位長さあたりのエネルギーも $T_{\rm str}$ によって与えられる。

弦は l_s 程度の大きさをもって振動している。l_s が十分小さいとすると、それぞれの弦はほとんど点とみなすことができ、振動の激しさに応じた質量

$$M^2 = \frac{4N_{\rm osc}}{l_s^2}, \quad N_{\rm osc} = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

を持つ粒子とみなすことができる。質量公式 (2) において、$N_{\rm osc}$ は弦の振動モードを表す非負整数であり、それぞれの $N_{\rm osc}$ に対してさらにスピンなどの量子数で区別される複数のモードが対応している。第一励起状態の質量よりも十分小さいエネルギー領域では、massive 粒子は低エネルギーの過程からは分離し、$N_{\rm osc} = 0$ の零質量粒子だけからなる低エネルギー有効理論を構成することができる。この理論は 10 次元の IIB 型超重力理論として知られており（表 1)、作用は次のように与えられる。

表 1: IIB 型超重力理論に含まれる場。これは弦の零質量モードとして現れる。

場	統計	自由度	説明
g_{MN}	B	35	10 次元の重力場
B_{MN}	B	28	2 階反対称テンソル場。弦のチャージに結合したゲージ場
ϕ	B	1	スカラー場。ディラトンと呼ばれる。弦理論の結合定数を決める。
C	B	1	スカラー場。アクシオンと呼ばれる。
C_{MN}	B	28	2 階反対称テンソル場。D1-ブレーンのチャージに結合するゲージ場。
C_{MNPQ}	B	35	4 階反対称テンソル場。D3-ブレーンのチャージに結合するゲージ場。
ψ_M^a	F	112	グラビティーノ。ベクトル添え字を持つスピノル場。
λ^a	F	16	ディラティーノ。スピノル場。

$$S_{\rm IIB} = \int d^{10}x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{(2\pi)^7 l_s^8 e^{2\phi}}R - \pi|G_5|^2 + \cdots\right] \tag{3}$$

ただし、$|G_5|^2$ は 4 階反対称テンソル場 C_{MNPQ} の運動項であり、次のように定義されている。

$$|G_5|^2 = \frac{1}{5!}G_{MNPQR}G^{MNPQR}, \quad G_{MNPQR} = \partial_M C_{NPQR} + 4 \text{ terms} \tag{4}$$

G_{MNPQR} の定義式中の 4 terms は添え字を反対称に入れ替えて作ることのできる残り 4 通りの項である。このような反対称テンソル場は外微分形式を用いて $G_5 = dC_4$ のようにも表される。その場合の添え字はテンソルのランクを表す。

作用 (3) にはこれら以外にも多くの項（ほかの場の運動項や相互作用項）があるが、以下で必要が無いのでここでは省略した。(3) の第 1 項は 10 次元の重力を与えるアインシュタイン-ヒルベルト項である。この項の係数から、10 次元のニュートン定数が次のように読み取られる。

$$\frac{1}{16\pi G_N^{(10)}} = \frac{1}{(2\pi)^7 l_s^8 e^{2\phi}}. \tag{5}$$

ϕ はディラトン場の期待値である。弦理論の相互作用の強さを表すパラメータとして $g_{\rm str} = e^{\phi}$ がしばしば用いられる。また、長さの次元を持つ量（プランク長）l_p も定義しておくと便利である。これらは次のように関係している。

$$32\pi^2 G_N^{(10)} = (2\pi l_p)^8 = (2\pi l_s)^8 g_{\rm str}^2 \tag{6}$$

2.2 開弦のセクター

超重力理論は表 1 にも示されているようにいくつかの反対称テンソル場を含んでいる。それらは異なる種類のチャージに結合するゲージ場である。一般に、$p+1$ 階の反対称テンソル場は時空中の $p+1$ 次元（時間方向 1 次元と空間方向 p 次元）のオブジェクトに結合することができる。このようなオブジェクトは p-ブレーンと呼ばれる。D-ブレーンは弦理論におけるソリトンのようなものであると考えられており、R-R 場と呼ばれる反対称テンソル場 C_2 や C_4 に対するチャージを持つオブジェクトである。D3-ブレーンの場合には、R-R 4-form 場 C_4 との結合は次の有効作用によって表すことができる。

$$S_{\mathrm{D3}} = 2\pi N \int C_4 \tag{7}$$

ブレーンのチャージ N はディラックの量子化条件により整数に量子化されており、ブレーンの枚数と解釈することができる。(7) と同じことを、ブレーンから湧き出すフラックス G_5 の積分として

$$\oint_{\mathrm{S}^5} G_5 = N. \tag{8}$$

と表すこともできる。G_5 は (4) に与えられた R-R 4-form 場 C_4 に対応する場の強さであり、積分領域は D3-ブレーンを囲む 5 次元球面 $\mathbf{S}^5$ である。（10 次元時空の中の 4 次元のオブジェクトは 5 次元の面で囲むことができる。）

場の理論で現れる代表的なソリトンであるモノポールは elementary な粒子に比べて扱うことが難しいように、弦理論において Dp-ブレーンを直接ソリトンとして扱い、そのダイナミカルな性質を調べることは難しい。しかし Polchinski は全く別の方法でソリトンと同じ性質、すなわち RR 場に対して電荷を持つようなオブジェクトを構成できることを示した。R-R 場は 10 次元時空中を運動する閉弦の振動モードの一つであるから、弦理論の立場で (7) の相互作用を解釈すると、D3 ブレーンが閉弦を吸収、放出できることを意味している。（図 1）Polchinski は逆に、弦が端をもてるような時空中

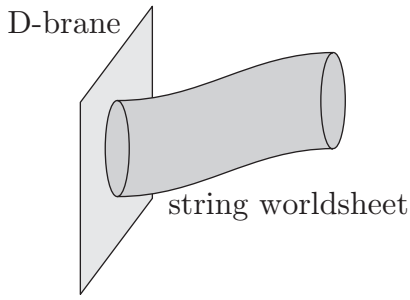

図 1: ブレーンからの閉弦の放出。このような過程の存在は、弦の世界面が D-ブレーン上に端を持てることを意味している。

の部分空間として D-ブレーンを導入すると、それが R-R 場と (7) のような相互作用をしていることを示した [4]。

例として、平坦な 10 次元時空の中の 0123 方向に広がった D3-ブレーンを考えよう。ブレーンの位置は $X^i = 0$ $(i = 4, \ldots, 9)$ によって与えられているとする。弦の形状は弦の世界面上の座標 σ と τ の関数として時空座標 X^M を与えることによって表現される。弦がブレーンの上に端を持っているという状況は、次の Dirichlet 境界条件によって表すことができる。

$$X^i(\sigma, \tau)|_{\sigma=0} = 0, \quad (i = 4, \ldots, 9) \tag{9}$$

弦の境界を $\sigma = 0$ とおいた。この条件が与えられると、弦理論の振幅の計算を行うことによってブレーンが実際に R-R 場と相互作用をしていることを示すことができる。実は D-ブレーンという名称は弦理論の境界条件 (9) が Dirichlet 型になることからきている。

D-ブレーン上に弦が端を持つことができるということを用いると、両端が D-ブレーンにくっついていて D-ブレーンの上に束縛された開弦を考えることができる。この開弦を量子化すると (2) に類似した質量を持つ振動モードが現れる。低エネルギーでは $N_{\rm osc}=0$ の零質量モードのみからなる有効理論として $\mathcal{N}=4$ の超対称性を持つ Yang-Mills 理論（表 2）が実現される。ここでは N 枚の D3-ブレーンが重なっている状況を考えよう。このときには、弦がブレーンにくっつくときにそれぞれの端点がどのブレーンにくっつくかによって N 通りずつの可能性がある。この結果、弦の量子化を行った際に現れるモードはすべて N^2 個ずつ現れる。これは、ゲージ群が $U(N)$ であり、その随伴表現の場が現れているものと解釈される。また、弦の一つの端点は $U(N)$ ゲージ群に対して基本表現あるいは反基本表現に属すると解釈される。

表 2: N 枚の重なった D3 ブレーンの上で実現される低エネルギー有効理論に含まれる場

場	統計	自由度	説明
A_μ	B	$2N^2$	$U(N)$ ゲージ場。
ϕ_a	B	$6N^2$	スカラー場。$i=1,\ldots,6$。それぞれ随伴表現に属する。
λ^a_A	F	$8N^2$	フェルミオン場。$A=1,\ldots,4$。それぞれ随伴表現に属する。

D3-ブレーンの低エネルギー有効作用も弦理論から計算することができて次のように与えられる。

$$S_{\rm D3}=\frac{1}{(2\pi)^3 l_s^4 g_{\rm str}}\int d^4x\left[-N-\frac{(2\pi)^2 l_s^4}{4}{\rm tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})+\cdots\right] \tag{10}$$

かっこの中の $-N$ はブレーン自身が持っているエネルギーを表す項であり、N 枚の D3 ブレーンの張力が次のように与えられることを示す。

$$T_{\rm D3}=\frac{N}{(2\pi)^3 l_s^4 g_{\rm str}} \tag{11}$$

弦の場合同様、ブレーンの張力は一定なのでエネルギー密度はブレーンの張力に等しい。その次の項は Yang-Mills 場の運動項である。この項の係数を見ることにより、ゲージ結合定数が次のように読み取られる。

$$g_{\rm YM}^2=2\pi g_{\rm str} \tag{12}$$

D-ブレーン上の理論として得られるゲージ理論は通常超対称性を持っている。超対称性はボゾンとフェルミオンを結びつける対称性であり、その変換パラメータはスピノルである。4 次元ではスピノルは常に実で数えて 4 つの成分を持っているから、超対称性も 4 つが常に組みになって現れる。ここでは超対称性の個数を表すのに $\mathcal{N}$ という文字を用い、4 つ組がいくつあるかということを表すことにする。一般に、対称性が大きくなると作用の形は制限されるが、これは超対称性についても言えることで $\mathcal{N}=4$ の超対称性がある場合にはゲージ群とゲージ結合定数 $g_{\rm YM}$、インスタントン角 θ を決めれば作用が一意的に与えられる。

超対称性がある理論ではボゾンとフェルミオンが常に対になって現れその物理的自由度が等しいため、ボゾンとフェルミオンの間で量子効果の相殺が起こり発散の次数が抑えられる。この相殺のおかげで表 2 にある $\mathcal{N}=4$ のゲージ理論は繰り込みの必要の無い有限な理論であり、β 関数は 0 である。これはスケールによって結合定数が変化しないということを意味しており、関係式 (12) はそのような繰り込み群不変な結合定数が弦理論の結合定数 $g_{\rm str}$ によって決まることを意味している。

$\mathcal{N}=4$ 超対称 Yang-Mills 理論のようにスケール変換のもとで不変な場の理論は共形場理論 (Conformal Field Theory) と呼ばれる。AdS/CFT はもともとこのような共形場理論に対して提案されたものであるが、現在では共形不変性のない理論に対しても応用されており、ゲージ/重力対応と呼ばれる場合もある。

3　弦理論によるゲージ理論の構成と解析

3.1　decoupling 極限

§2 で見たように、弦理論は大きく分けて二つのセクターからなる。つまり、§2.1 で与えた重力（閉弦）セクターと §2.2 で与えたゲージ（開弦）セクターである。弦理論を用いてゲージ理論を解析するためにはゲージセクターだけを残して重力部分を分離する必要がある。そのためにはゲージ結合定数 (12) を一定に保ちながらニュートン定数 (6) を 0 にするような極限操作を行えばよい。ゲージ結合定数を一定にするということは、弦の結合定数 $g_{\rm str}$ を一定に保つということを意味しており、この条件のもとで次のように長さスケール l_s を 0 にすることによってニュートン定数を 0 にすることができる。

$$l_s \to 0, \quad g_{\rm str} : \text{fixed} \tag{13}$$

この操作を行うことを decoupling 極限に移行するという。この極限では、ダイナミカルなモードはブレーンの上に存在しているゲージ理論の場のみとなり、それだけで閉じた系をなす。つまり、ブレーン上でゲージ場の粒子の散乱実験などを行ったときに重力子が missing energy としてブレーンの外に放出されるといった現象は起こらない。

背景時空に存在する重力場やそのほかの場がブレーン上の場との相互作用で励起されることはないとしても、それらは背景場としてゲージ理論のラグランジアンに含まれている。たとえばゲージ理論のエネルギー運動量テンソルは背景計量 $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ に結合した場として定義することができる。このことを用いると、ブレーンの背景に存在する重力場やそのほかの閉弦由来の場を、ゲージ理論の「変形」を表すために用いることができる。例えば、背景の計量をすこし変形して $\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ にすれば、ゲージ理論が定義されている D-ブレーン上の計量も変化し、D-ブレーン上の理論の作用が次のように変更される。

$$S'_{\rm YM} = S_{\rm YM} + \int h^{\mu\nu} T_{\mu\nu} d^4x \tag{14}$$

さらに一般の背景場（超重力理論に含まれる場だけではなく、弦の励起状態も含めたさまざまな場）を外場 J として用いれば、その外場と結合したゲージ理論の演算子 $\mathcal{O}$ の挿入を表すことができ、分配関数

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_{\rm YM}[\phi] + \int J\mathcal{O} d^4x} \tag{15}$$

を定義することができる。ただし、ϕ は表 2 に与えられているブレーン上の場を表し、$S_{\rm YM}[\phi]$ はブレーン上のゲージ理論の作用である。この分配関数が計算できれば外場 J で微分することによりゲージ理論におけるさまざまな相関関数が得られる。しかし (15) の経路積分を直接行うことは、結合定数 $g_{\rm YM}$ が 0 であるような特殊な場合を除きそのままでは難しい。しかし弦理論においてはこの系に対する異なる見方をすることで、弦理論の強結合に対応するパラメータ領域での計算を行う方法が存在する。それが次の節で述べる AdS/CFT である。

3.2　D-ブレーン古典解と AdS/CFT

D3-ブレーンは §2.2 で説明したように R-R 場 C_4 に結合したチャージとエネルギーを持つオブジェクトである。ブレーンがエネルギーを持つということは、その重力によって背景の時空を曲げることを意味する。もしブレーンの枚数 N（これはブレーンの上のゲージ理論のゲージ群のサイズである。）が非常に大きくなり、(11) によって与えられるブレーンのエネルギーが大きくなると、ブレーンをブラックホールのようなアインシュタイン方程式の古典解として記述することができ、重力を用いて相関関数 (15) を計算することができるようになる。

ブレーンが背景時空をどれくらい曲げるか、その典型的なスケールは次元解析から簡単に求めることができる。アインシュタイン方程式の中に現れるパラメータは (11) で与えられるブレーンの張力

$T_{\rm D3}$ と (6) で与えられるニュートン定数 $G_N^{(10)}$ だけであり、しかもこれらは積 $G_N^{(10)}T_{\rm D3}$ の形で現れる。従って、古典解の典型的長さスケールを L とおくと、次元解析から

$$L^4 \sim G_N^{(10)}T_{\rm D3} \sim Ng_{\rm str}l_s^4 \sim Ng_{\rm YM}^2 \tag{16}$$

が得られる。

ここでは古典的な超重力理論の作用を用いてブレーンを古典解として記述しようとしているが、弦理論には超重力理論に含まれる場だけではなく (2) によって与えられるような質量をもつ場も存在している。また、プランク長さ程度のスケールでは重力の量子効果が重要になってくる。このような補正が無視できなくなると事実上解析ができなくなってしまうので、補正が十分小さく古典的重力が十分よい近似となるためのパラメータに対する条件を求めておこう。重力の量子効果が無視できるためには、背景のスケール L がプランク長 l_p に比べて十分大きいことが必要である。(6) に与えられたプランク長と (16) のように見積もられた長さ L を比較すると、次の条件が得られる。

$$N \gg 1. \tag{17}$$

これはゲージ理論の群のサイズが大きいことを表している。一方弦理論の励起モードであるが、これらは (2) に与えられているように $1/l_s$ 程度の質量を持つので、古典解のスケール L が弦のスケール l_s よりも十分大きければ励起モードによる補正が無視できる。L の式 (16) を用いればこれは次の条件を与える。

$$Ng_{\rm str} \sim Ng_{\rm YM}^2 \gg 1. \tag{18}$$

この式に現れた $Ng_{\rm YM}^2$ は N が大きいゲージ理論における有効結合定数としてしばしば用いられるもので 't Hooft 結合定数と呼ばれる。以上のことから、古典的重力を用いるブレーンの解析が信頼できるパラメータの領域は、ゲージ理論側では解析の難しい強結合の領域に対応することがわかる。

パラメータに対する条件 (17) および (18) が満足されているとして古典解を求めよう。D3-ブレーンがチャージ N を持っているということは D3-ブレーンの周りで R-R 場 $G_5 = dC_4$ の積分が (8) のように与えられることを表している。この G_5 のエネルギー運動量テンソルを求め、それを右辺とするようなアインシュタイン方程式を解けば、次の計量を得ることができる。

$$ds^2 = H^{-1/2}(r)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + H^{1/2}(r)(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \tag{19}$$

x^μ がブレーンに沿った 4 次元座標、r はブレーンからの距離を表す動径座標であり、$d\Omega_5$ はブレーンを囲む $\mathbf{S}^5$ の角度座標に対する線素である。$H(r)$ は次のように定義される関数である。

$$H(r) = 1 + \frac{L^4}{r^4}. \tag{20}$$

この関数の中に含まれる長さの次元を持つ定数 L は先ほど次元解析から (16) のように見積もられた解のスケールパラメータであり、正確には次のようになる。

$$L^4 = 4\pi N g_{\rm str} l_s^4. \tag{21}$$

ここで与えた古典解は x^μ 方向のローレンツ対称性を破っておらず、BPS D3-ブレーン解と呼ばれる。（BPS という言葉は Bogomolnyi, Prasad, Sommerfield という 3 人の頭文字である。意味についてはここでは説明しない。）

計量 (19) を見てみると、この解は次の二つの領域よりなることが分かる。

- $L < r$ の領域

  r が大きいところ、すなわち古典解の中心部から十分離れた漸近的な領域では関数 $H(r)$ は近似的に 1 であるから、計量 (19) は平坦な 10 次元時空を与える。

- $0 \leq r \leq L$ の領域

  この領域では $H(r) \sim L^4/r^4$ であり、計量は次のようになる。

$$ds^2 = \left(\frac{r^2}{L^2}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{L^2}{r^2}dr^2\right) + L^2 d\Omega_5^2 \tag{22}$$

  最後の項は $\mathbf{S}^5$（ブレーンを囲む 5 次元球面）の計量を表しているが、その半径が一定値 L となっている。従って、(22) によって与えられる時空は括弧でくくった初め二つの項で表される 5 次元時空と半径 L の $\mathbf{S}^5$ の直積になっている。実は初め二つの項は 5 次元反ドジッター時空 AdS_5 を表す計量である。すなわちこの領域内の時空は $\mathrm{AdS}_5 \times \mathbf{S}^5$ である。

この解の構造をごく単純に示したのが図 2 の (b) である。中心の円柱状の領域が $r < L$ の AdS 領域を表している。図ではこの領域を大きく描いているが、その幅 L は (21) からも分かるように弦のスケール l_s に比例する小さなものである。特にブレーン上のゲージ理論を重力と切り離すための decoupling 極限を取ると、L は l_s に比例して限りなく小さくなっていくから、マクロな観測者は (a) に描かれたような厚さの無いブレーンと (b) の古典解を見分けることはできない。このことを利用し

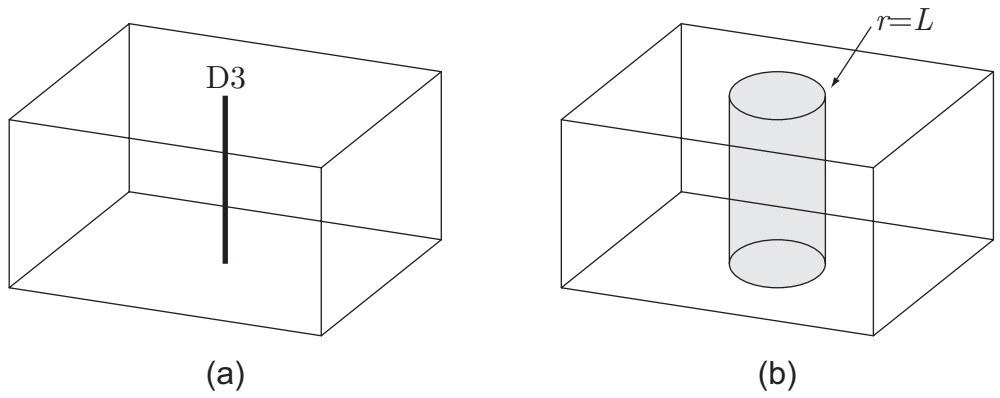

図 2: ブレーン (a) と対応する古典解 (b)。(a) においてブレーンは太さの無い線のようなものとして表されている。一方古典解 (b) は L 程度の太さを持った領域として与えられる。ただし L は l_s 程度の小さな長さであるので、マクロなスケールのみを見ることのできる観測者には (a) と (b) の区別はつかない。

てブレーン上のゲージ理論の性質を古典解の中心部分の AdS 空間上の重力理論、あるいは弦理論を用いて解析しようというのが AdS/CFT、あるいはゲージ/重力対応である [1]。

3.3 相関関数と粒子スペクトル

古典解 (19) の AdS 領域は、計量の g_{00} 成分を見ても分かるように $r = 0$ に近づくに従って深くなる重力ポテンシャルの井戸として振る舞い、その中に局在化した多くの規格化可能モードが存在している。これらのモードを遠方にいるマクロな観測者から見ると、厚さの無いブレーンの上に存在するダイナミカルな自由度として見える。つまり、ブレーンの上のゲージ理論の自由度のように見える。また、decoupling 極限においてブレーン上のゲージ理論の自由度とその周りの重力の自由度が分離するということは、ポテンシャルの井戸がどんどん深くなり、中に存在するモードが外にまで現れてこないと解釈することができる。このため decoupling 極限におけるゲージ理論の解析においては古典解 (19) の二つの領域のうち、AdS 部分だけが重要な役割を果たす。実際、エネルギースケールを決めたときに対応する局在化したモードが中心部からどの程度の範囲に広がっているかということを大まかに見積もることがきて、$r \sim l_s^2$ 程度の領域だけが低エネルギーの物理に反映されることが示される。

このように、古典解の AdS 領域のごく狭い範囲にある局在化したモードとブレーン上のゲージ理論の自由度を同一視すると、(15) に与えられた経路積分は次のように書くことができる。

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\Phi_{\rm AdS} e^{-S_{\rm string}[\Phi_{\rm AdS}]} \tag{23}$$

ただし $\mathcal{D}\Phi_{\rm AdS}$ は AdS 領域上の場の局在化したモードを適当な境界条件のもとで積分することを表し、$S_{\rm string}$ は AdS 背景上の弦理論の作用、すなわち弦の振動モードに対応した全ての場に対する作用である。もちろん、このような経路積分を任意のパラメータ領域で計算することはゲージ理論側の計算同様、あるいはそれ以上に困難であるが、条件 (17) と (18) が満たされ、古典的な超重力理論がよい近似になっているような場合には経路積分が超重力理論の単なる極値問題に帰着してしまう。すなわち、(23) は次のように簡単化される。

$$Z[J] = e^{-S_{\rm SUGRA}[\Phi^{\rm cl}_{\rm AdS}]} \tag{24}$$

ここで、右辺の $S_{\rm SUGRA}[\Phi^{\rm cl}_{\rm AdS}]$ は古典的超重力理論の作用に、その作用から得られる運動方程式（アインシュタイン方程式など）の古典解 $\Phi^{\rm cl}_{\rm AdS}$ を代入したものである。

ここで、この式の右辺にどのように外場 J の情報が含まれているのかを考えてみよう。ブレーン上のゲージ理論の分配関数の式 (15) において、外場 J はブレーンが含まれる背景時空の場であった。ブレーンを古典解として表す立場では、この背景場は古典解の平坦領域 $r > L$ での値であると解釈することができるであろう。つまり、$r > L$ において $\Phi(x^\mu, r) \sim J(x^\mu)$ である。この場は AdS 領域 $r < L$ の場と連続的につながっていなければならないから、式 (23) における AdS 領域上の場の経路積分において、J は次のような境界条件として現れる。

$$\Phi_{\rm AdS}(x^\mu, r)|_{r\sim L} \sim J(x^\mu). \tag{25}$$

この境界条件は、古典的重力を用いる (24) の場合にも運動方程式を解く際の境界条件として用いられる。境界条件 (25) を設定することで得られた運動方程式の解を $\Phi^{\rm cl}_{\rm AdS}[J]$ と書くことにすると、ゲージ理論側の分配関数と重力理論を用いて計算した分配関数の間の関係は次のように与えられる。

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S_{\rm YM}[\phi] + \int J\mathcal{O} d^4x} = e^{-S_{\rm SUGRA}[\Phi^{\rm cl}_{\rm AdS}[J]]} \tag{26}$$

このような対応関係は Gubser, Klebanov, Polyakov[2] および Witten[3] によって与えられ、(26) はしばしば GKP-Witten の関係式と呼ばれる。

関係式 (26) を用いて場の理論の相関関数を決定するには、場の理論の演算子 $\mathcal{O}$ それぞれに対して対応する AdS_5 空間上の場 $\Phi_{\rm AdS}$ が存在していてその間の対応を知っておく必要がある。この関係は “field-operator 対応” と呼ばれていて、この対応を明らかにすること自体が AdS/CFT の中の重要な研究課題となっている。

この対応を具体的に決定するためには、ゲージ理論と AdS 空間それぞれの対称性を用いるのが便利である。まず、ゲージ理論側での対称性であるが、4 次元時空上の理論であるから、並進変換 P_μ とローレンツ変換 $M_{\mu\nu}$ のもとでの不変性がある。さらに、D3-ブレーン上で実現される $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills 理論はスケールを持たない共形不変な理論であるのでディラテーション変換 D、すなわち $x^\mu \to \alpha x^\mu$ のもとで不変である。さらに、コンフォーマルブーストと呼ばれる 4 つの変換 K_μ のもとでも不変であることが知られている。これら 15 個の生成子を座標 x^μ に作用する微分演算子として表すと次のようになる。

$$P_\mu = \partial_\mu, \tag{27}$$

$$M_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu, \tag{28}$$

$$D = x^\mu \partial_\mu, \tag{29}$$

$$K_\mu = x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu. \tag{30}$$

これらの生成子はコンフォーマル群と呼ばれる群 $SO(2,4)$ を生成する。さらに $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論には表 2 中のフェルミオン場 λ_A^a を **4** 表現、スカラー場 ϕ_a を **6** 表現として変換するような内部対称性 $SU(4)\sim SO(6)$ が存在している。

実は、D3-ブレーン古典解の AdS 領域 $r<L$ に対しても全く同じ対称性が存在することを確かめることができる。まず、古典解 (22) に与えられた古典解の AdS 部分

$$ds^2=\frac{r^2}{L^2}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu+\frac{L^2}{r^2}dr^2 \tag{31}$$

を見てみると、上記の P_μ 変換と $M_{\mu\nu}$ 変換のもとで不変であることは明らかである。さらに、ディラテーション変換についても、次のように x^μ をリスケールすると同時に r も変換すれば計量は不変になる。

$$D: r\to r'=\alpha^{-1}r,\quad x^\mu\to x'^\mu=\alpha x^\mu. \tag{32}$$

この他にも x^μ と r を混ぜるような変換を考えることでコンフォーマルブースト K_μ に対応する AdS 空間の対称変換を作ることができ、全体としては群 $SO(2,4)$ をなしていることがわかる。また、$\mathbf{S}^5$ 部分の対称性として $SO(6)$ を持ち、全体として場の理論と全く同じ対称性を持っている。この共通の対称性のもとでゲージ理論の演算子 $\mathcal{O}$ と AdS 側での場 $\Phi_{\rm AdS}$ を分類して比較することにより、これらの間の対応を推測することができる。演算子 Φ の種類によって $\mathrm{AdS}_5\times\mathbf{S}^5$ 側の対応物は超重力理論に含まれる零質量の場であったり弦の励起モードであったりとさまざまであるが、超重力理論に含まれる場と演算子の間の対応についてはよく知られている [3]。

場の理論のディラテーション変換の AdS 古典解側での表現 (32) が意味することは、x^μ 空間での長さのスケールの縮小が r 座標の拡大に対応しているということである。このことから r 座標をエネルギースケールと読み替えることができる。すなわち r の小さい領域がゲージ理論の低エネルギーの振る舞いを反映しており、r が大きい領域がゲージ理論の高エネルギーの振る舞いを反映していると解釈できる。実際にエネルギースケール μ と関係させるためには、次元をあわせるために弦の張力を用いて

$$\mu\sim T_{\rm str}r \tag{33}$$

のようにおく。これは、エネルギースケール μ を指定したとき対応する局在化モードが AdS 古典解中のどの程度の領域に広がっているかを表す式であると解釈することができる。場の理論のエネルギースケールを固定して decoupling 極限 (13) を取ることを考えると、座標 $r\propto l_s^2$ は古典解のスケール $L\propto l_s^1$ と比較して非常に小さいことがわかる。このことからも AdS/CFT における解析では古典解 (19) の AdS 領域 $r<L$ だけが重要であることが確認される。

3.4 クォーク・反クォークポテンシャル

前の節で述べた AdS/CFT を用いたゲージ理論の相関関数の計算手順は次のようにまとめることができる。

1. 弦理論のブレーンを用いてゲージ理論を構成する。ここでブレーンをどのように配置するか、どのような decoupling 極限を取るかを決める。

2. 外部からブレーンに刺激を与え、その応答としてゲージ理論における物理量を調べる方法を考える。相関関数の計算においては背景外場 J の導入がブレーンに対する刺激であり、その応答としての分配関数の変化を見ることによって相関関数を求めることができる。

3. ブレーンが背景時空に及ぼす影響を考慮し、古典解で置き換える。この操作が有効であるためには $N\gg 1$, $Ng_{\rm YM}^2\gg 1$ という条件が満足される必要がある。この古典解に対して 2 でブレーンに対して与えたのと同じ刺激を与えることにより、ゲージ理論の物理量を計算する。

同様の考え方で、相関関数の場合とは異なるタイプの刺激を用いることにより、クォーク・反クォークのポテンシャルを求めることができる [7]。（ただしここで考えている $\mathcal{N}=4$ のゲージ理論にはクォークはダイナミカルな場としては含まれていないので、外場として導入される。）

前にも述べたように、ブレーン上の弦の端点はブレーン上の $U(N)$ ゲージ場に対して基本表現または反基本表現に属している。どちらの表現になるかは弦の向きに依存する。従って、外部からブレーン上に弦を垂らすことにより、外場としてのクォークや反クォークを導入することができる。クォークと反クォークの間のポテンシャルを測定したければ、二本の逆向きの弦をブレーンに垂らし、その間の距離を変化させながらエネルギーを測定すればよい。ブレーンの見方でこの二本の弦の間のポテンシャルエネルギーを計算することは、弦の端点の電荷の間のゲージ場による引力を計算することになるからゲージ理論のポテンシャル計算と同じことを行わなければならず、強結合領域での計算は難しい。そこで、ブレーンに弦をくっつけるという「刺激」を古典解に対して行うことを考え、古典解を用いて同じ物理量を計算してみよう。

ブレーンを古典解に置き換えると、弦がくっつける場所がなくなるから、垂らされた二本の弦は AdS 領域の内部でつながり一本の弦になっている。（図 3）外部にいるマクロな観測者にとっては AdS 領域の内部構造は小さくて見えないため、あたかも独立な二本の弦がブレーンにくっついているように見える。古典解中の弦は重力ポテンシャルと弦の張力とによって決まる懸垂線を描く。弦の両端が x^1

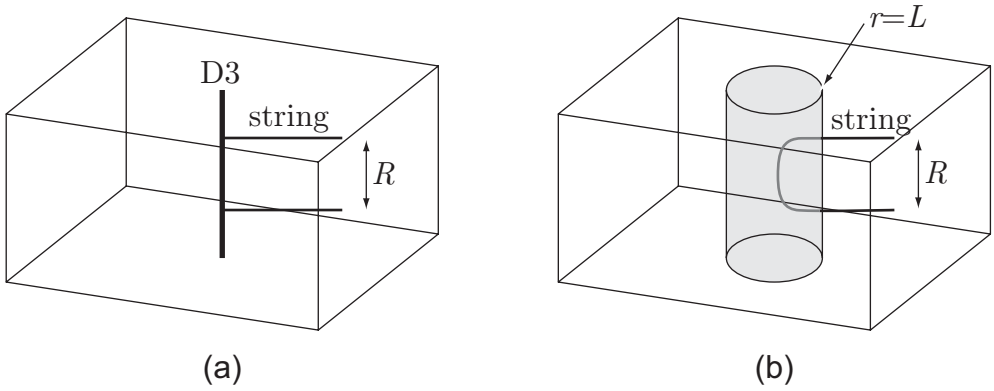

図 3: クォーク・反クォークポテンシャルの計算を行うための配位。ブレーンの立場では二本の独立な弦に見えているものは、ブレーンを古典解で置き換えると内部でつながった一本の弦になる。外側にいるマクロな観測者にはこれら二つの区別はつかない。

方向に R だけ離れたところに固定されていたとしよう。弦の形状が x^1-r 平面上の曲線として与えられると、弦のエネルギーは次の式によって与えられる。

$$E = T_{\rm str}\int\sqrt{-g_{tt}}ds = T_{\rm str}\int\sqrt{-g_{tt}}\sqrt{g_{rr}dr^2+g_{11}(dx^1)^2} \tag{34}$$

弦が動径方向に無限遠まで伸びているとすると (34) は発散してしまって計算ができないので、cut-off $r_{\rm max}$ を導入して $r=r_{\rm max}$ で与えられる境界から r が小さい領域に垂らされているとする。このエネルギーを最小化するような曲線を求め、そのエネルギーを弦の両端の距離 R の関数として計算すると、次のような結果が得られる。

$$E = T_{\rm str}\left(2r_{\rm max}+c\frac{L^2}{R}+\mathcal{O}(r_{\rm max}^{-1})\right) \tag{35}$$

cut-off $r_{\rm max}$ を大きく取る極限では括弧の中の第 1 項が最も大きくなるが、この項は R に依存しない定数であり、無視することができる。クォーク・反クォークポテンシャルを与えるのは第 2 項である。

c は数係数であり、解析的に求めることができる。cut-off が十分大きいとして第 3 項も無視すると、

$$E = cT_{\rm str}\frac{L^2}{R} \tag{36}$$

となり、R に反比例するクーロンポテンシャルが得られる。

ここでは、共系対称性を持つ理論を扱っているため、R に反比例するエネルギーが得られることは次元解析だけから分かることである。自明でないのはその係数が

$$cT_{\rm str}L^2 = c\sqrt{\frac{Ng_{\rm YM}^2}{2\pi^2}} \tag{37}$$

のように $Ng_{\rm YM}^2$ ではなく $\sqrt{Ng_{\rm YM}^2}$ に比例している点である。じつは、ゲージ理論側の解析においても無限個のゲージ場のプロパゲータの寄与を足し上げることによりこの因子が現れることが知られており [8]、AdS/CFT によって強結合領域でのゲージ理論の非自明な振る舞いが簡単に解析できる好例となっている。

エネルギーの式 (35) には R に比例する項がなく、閉じ込めの起こった理論に特有な linear ポテンシャルは現れていない。この理由を古典解の幾何学的性質を用いて以下のように説明することができる。弦の両端の間の距離 R をいくら大きくしてもエネルギーが増加しないということは、中間領域の弦がエネルギーに全く寄与していないことを表している。このような領域では、弦は重力ポテンシャルのためにほとんど $r = 0$ のところまで落ち込んでいる。弦が $r = 0$ のところで x^1 方向に伸びている場合、エネルギーの式 (34) の被積分関数は $\sqrt{-g_{tt}g_{11}}|_{r=0}$ になる。古典解 (31) ではこの値は 0 になり、中間領域は積分に寄与しない。

AdS/CFT では異なるゲージ理論は異なる古典解に対応しているが、もし仮にある古典解において (34) の被積分関数が r の最小点 $r_{\rm min}$ で 0 にならないとすると、エネルギーは R が大きいところで

$$E \sim T_{\rm str}\sqrt{-g_{tt}g_{11}}|_{r=r_{\rm min}}R \tag{38}$$

のように振舞うはずである。もしこのようなことが起これば、ゲージ理論側では閉じ込めが起こっており、クォークと反クォークが次の式によって与えられる張力を持つ QCD 弦で結ばれていると解釈することができる。

$$T_{\rm QCD} = T_{\rm str}\sqrt{-g_{tt}g_{11}}|_{r=r_{\rm min}}. \tag{39}$$

この式は古典解の幾何学的構造とゲージ理論の閉じ込め、非閉じ込めの関係を与える重要な式である。(ダイナミカルなクォークが存在する場合には R を大きくするとクォーク・反クォークの対生成によって QCD 弦は切れてしまうためクォーク・反クォークポテンシャルによって閉じ込めが起こっているかどうかを判定することはできないが、その様な場合でも (39) の右辺は系の相を判定する重要なパラメータである。)

4 有限温度系

ここまでは、$\mathcal{N} = 4$ の超対称ゲージ理論について、ブレーンによる構成と古典解を用いた計算方法について簡単に述べてきた。同様の考え方でさまざまなゲージ理論を解析することができる。とくにハドロン物理への応用で重要なのは、超対称性が破れているような状況である。超対称性を破る方法としては、有限温度にする方法と、温度が 0 である場合にもはじめから超対称性が破れている理論を用いる方法がある。もちろん、もともと超対称性の無い理論の有限温度の振る舞いを調べるということも重要な問題であるが、この節では簡単な例として $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論の有限温度系について述べる。

以下で説明する AdS/CFT を用いた解析との比較のために、有限温度 $\mathcal{N}=4$ 超対称 Yang-Mills 理論の熱力学的物理量を幾つか自由場近似を用いて求めておこう。熱平衡にある零質量場の熱力学的な物理量は相互作用が無いと仮定すると場の自由度の数と統計によって完全に決まってしまう。内部エネルギー、エントロピー、自由エネルギーは次のように与えられる。

$$U_{\rm free}=\frac{\pi^2}{30}n_{\rm tot}T^4,\quad S_{\rm free}=\frac{4}{3}\frac{\pi^2}{30}n_{\rm tot}T^3,\quad F_{\rm free}=-\frac{1}{3}\frac{\pi^2}{30}n_{\rm tot}T^4. \tag{40}$$

ただし $n_{\rm tot}$ は統計性の違いを考慮した自由度の数で、ボゾンの自由度 n_B とフェルミオンの自由度 n_F から次のように計算される。

$$n_{\rm tot}=n_B+\frac{7}{8}n_F. \tag{41}$$

$\mathcal{N}=4$ 超対称 Yang-Mills 理論の場合には表 2 からも分かるように $n_F=n_B=8N^2$ であるから、$n_{\rm tot}$ は

$$n_{\rm tot}=8N^2+\frac{7}{8}\times 8N^2=15N^2 \tag{42}$$

と与えられる。これを (40) に代入すると、自由場近似での $\mathcal{N}=4$ 超対称 Yang-Mills 理論の熱力学的量が次のように与えられる。

$$U_{\rm free}=\frac{\pi^2}{2}N^2T^4,\quad S_{\rm free}=\frac{4}{3}\frac{\pi^2}{2}N^2T^3,\quad F_{\rm free}=-\frac{1}{3}\frac{\pi^2}{2}N^2T^4. \tag{43}$$

$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論には共形対称性があるため、これらの式の T 依存性は次元解析だけから決定される。相互作用が 0 でない場合の効果は、$n_{\rm tot}$ を有効自由度 $n_{\rm eff}(g_{\rm YM})$ に置き換える効果として現れる。

4.1 非 BPS な D3-brane 解

有限温度の場の理論を扱う便利な方法として、時間方向を Wick 回転してユークリッド空間上の場の理論にもって行き、時間方向を周期 $\beta=1/T$ でコンパクト化する方法（松原形式）が知られている。この方法では時間方向についての境界条件をボゾンに対しては周期境界条件、フェルミオンに対しては反周期境界条件に取る。超対称性を持つ場の理論に対してこの操作を行うと、ボゾンとフェルミオンに対する境界条件の違いによって超対称性が破れる。

このような状況を弦理論で実現するには、ユークリッド化された 10 次元時空の時間方向を周期 β の $\mathbf{S}^1$ でコンパクト化し、その方向に D3-ブレーンを巻きつければよい [6]。対応する古典解は次のように与えられる [5]。

$$ds^2=H^{-\frac{1}{2}}(f(r)dt^2+dx_i^2)+H^{\frac{1}{2}}(f^{-1}(r)dr^2+r^2d\Omega_5^2) \tag{44}$$

ただし、関数 $H(r)$ と $f(r)$ は次のように与えられる。

$$H(r)=1+\frac{L^4}{r^4},\quad f(r)=1-\frac{\Delta^4}{r^4}. \tag{45}$$

この解は時間方向と空間方向の間にローレンツ対称性が無く、非 BPS D3-ブレーン解と呼ばれる。関数 $f(r)$ が $r=\Delta$ で 0 になるために、そこで時間方向の計量 g_{tt} も 0 になる。すなわち $r=\Delta$ に地平面が現れる。従ってこの解は一種のブラックホールである。((19) に与えた解も $r=0$ で $g_{tt}=0$ になる。しかしそれと同時に $g_{11}=g_{22}=g_{33}$ も 0 になるため、地平面の面積は 0 である。これに対して (44) に与えられた解は 0 でない地平面の面積を持つ。）計量に現れる二つのパラメータ L と Δ はブレーンのチャージ（枚数）N と次のように関係している。

$$L^2L'^2=4\pi N g_{\rm str}l_s^4,\quad L'^4=L^4+\Delta^4. \tag{46}$$

$\Delta = 0$ の場合には関数 $f(r)$ が 1 になり、BPS D3-ブレーン解 (19) に一致する。

関数 $f(r)$ に含まれるパラメータ Δ はコンパクト化の周期と関係している。この関係式は $r = \Delta$ において解が滑らかであることを要求することによって得ることができる。二つの座標 r と t のなす曲面に注目しよう。時間方向を一周する円の長さは計量 g_{tt} に依存し、$r = \Delta$ で 0 になるので、計量 (44) は図 4 のような葉巻の先のような形状を表している。$r = \Delta$ の点はこの葉巻の先端に対応してい

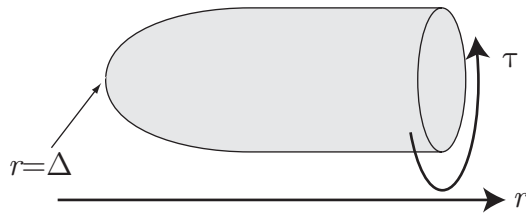

図 4: ユークリッド化されたブラックホール解の中心部分の構造。r 座標と t 座標によって張られる面は葉巻の先のような構造をしている。t の周期をうまくとることによって先端を滑らかにすることができる。

るが、時間方向の周期とパラメータ Δ の関係をうまくとらなければ、ここに円錐状の特異点が現れる。$r = \Delta$ の近傍の様子を調べるために $r = \Delta + \epsilon^2$ とおき、ϵ が十分小さいとすると、計量の r-t 成分は以下のようになる。

$$ds^2 = H^{-\frac{1}{2}} f dt^2 + H^{\frac{1}{2}} f^{-1} dr^2 = \frac{L'^2}{\Delta}\left[d\epsilon^2 + \epsilon^2\left(\frac{2\Delta}{L'^2}d\tau\right)^2\right] + \cdots \tag{47}$$

これはちょうど ϵ を動径座標、τ を角度座標とする極座標の形をしているが、原点で滑らかであるためには角度変数 τ の周期 $\beta = 1/T$ が次のように与えられる必要がある。

$$\frac{1}{T} = \beta = \pi\frac{L'^2}{\Delta}. \tag{48}$$

T はここで考えているブラックホールのホーキング温度であり、AdS/CFT を考える際には場の理論の温度と同一視される。

場の理論の解析を行う場合には、ゲージ理論側のパラメータ、すなわち N、$g_{\rm YM}$、そして T を一定に保ちながら l_s を 0 にする decoupling 極限をとらなければならないが、関係式 (46) およびホーキング温度の式 (48) を用いれば L、L'、Δ が次のように振舞うことがわかる。

$$L \sim L' \propto l_s^1, \quad r, \Delta \propto l_s^2 \tag{49}$$

(33) から得られる動径座標 r の振る舞いも一緒に与えておいた。

この極限においては、(22) で行ったのと同様に、再び関数 H の中の定数項 1 を無視することができて、計量が次のように与えられる。

$$ds^2 = \left(\frac{r^2}{L^2}(f dt^2 + dx_i^2) + \frac{L^2}{r^2} f^{-1} dr^2\right) + L^2 d\Omega_5^2. \tag{50}$$

$\Delta = 0$ の場合と同様、半径が L の $\mathbf{S}^5$ と 5 次元の時空の直積の形になる。この 5 次元時空は $r \gg \Delta$ の領域では AdS_5 に一致するが、$r = \Delta$ のところに地平面が存在しており、AdS Schwarzchild ブラックホールと呼ばれる解になっている。このように AdS 時空の形状が変形すると、(32) に与えた時空の対称性が破れる。これは温度という次元を持つ量を導入したことによって、もともと $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論が持っていた共形対称性が破れたことに対応していると解釈することができる。

decoupling 極限でのパラメータの関係をまとめておこう。

$$\Delta = \pi L^2 T, \quad G_N^{(10)} = \frac{\pi^4 L^8}{2N^2}. \tag{51}$$

Δ についての式は (48) に与えられたものであるが、decoupling 極限では L と L' が等しくなることを用いて L' を L に置き換えておいた。ニュートン定数については (6) を (46) を用いて書き換えることで得られるものである。

4.2 エントロピー

有限温度系の物理量の一例として、エントロピーを計算してみよう。AdS/CFT でエントロピーを計算するには、ブラックホールのエントロピーを与える Bekenstein-Hawking の公式を用いる。

$$S_{\rm BH} = \frac{A}{4G_N} \tag{52}$$

ただし、$S_{\rm BH}$ はブラックホールのエントロピーで、A はブラックホールの地平面の面積である。この公式は何次元の重力理論においても成り立ち、G_N はその次元でのニュートン定数である。ここでは 10 次元の古典解 (50) を用いて地平面の面積を計算しよう。この計量に $r = \Delta$ を代入すると、地平面上の計量が次のように得られる。

$$ds^2_{\rm hor} = \frac{\Delta^2}{L^2} dx_i^2 + L^2 d\Omega_5^2 \tag{53}$$

3 次元単位体積あたりのエントロピーを求めるために dx_i 方向の積分を 1 とすると、面積は

$$A = \pi^3 L^2 \Delta^3 \tag{54}$$

と与えられる。（半径 L の $\mathbf{S}^5$ の体積が $\pi^3 L^5$ であることを用いた。）この面積とパラメータの関係式 (51) を (52) に代入することで、次のエントロピーを得る。

$$S_{\rm BH} = \frac{N^2 \Delta^3}{2\pi L^6} = \frac{\pi^2 N^2}{2} T^3 = \frac{3}{4} S_{\rm free} \tag{55}$$

これは自由場で計算した結果の 3/4 倍である。このずれは AdS/CFT がうまくいっていないことを表しているものではなく、AdS/CFT によって記述される強結合のゲージ理論では実際にエントロピーがこれだけ小さくなることを表していると解釈されている。そうだとすると (55) は強結合の $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論の有限温度での有効自由度の振る舞いに対する予言

$$\lim_{g_{\rm YM} \to \infty} n_{\rm eff}(g_{\rm YM}) = \frac{3}{4} n_{\rm tot} = \frac{45}{4} N^2 \tag{56}$$

を与えている。実際、ゲージ理論における摂動論を用いた計算では、$g_{\rm YM}$ が 0 でないことによる補正は有効自由度を小さくする向きに働くことが知られている。また、重力側で $1/(N g_{\rm YM}^2)$ が 0 でないことによる補正を弦理論の励起モードの効果として取り入れると、その補正は有効自由度を大きくする向きに働くことも示されている [9]。（つまり両方の結果は中間領域でつながりそうに見える。）

5 超対称性のない理論の AdS/CFT

前節では温度によって超対称性が破れている場合についての AdS/CFT の解析例を見たが、現実の QCD はもともと超対称性を持たないから、温度が 0 であっても超対称性の無い理論を AdS/CFT で解析することはきわめて重要である。超対称性が完全に破れた理論を構成するには、ブレーンをある

半径 $R_{\rm KK}$ の $\mathbf{S}^1$ に巻きつけ、その $\mathbf{S}^1$ 方向に対してボゾンとフェルミオンで異なる境界条件を課せばよい [6]。ボゾンに対して周期境界条件を、フェルミオンに対して反周期境界条件を課すと、もともと零質量であったボゾン場とフェルミオン場は次のような Kaluza-Klein 質量を得る。

$$M^B = \frac{1}{R_{\rm KK}} n, \quad M^F = \frac{1}{R_{\rm KK}} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{57}$$

$R_{\rm KK}$ が十分に小さければ、零質量のモード以外は全て大きな質量を持つようになり、理論から分離すると期待される。そうして残るのはボゾンの $n = 0$ モードだけであり、ボゾンとフェルミオンの間の対称性である超対称性はなくなる。残った零質量ボゾンにはスカラー場とゲージ場が含まれるが、スカラー場は一般に 1-loop で質量を獲得し、零質量のままで残るのはゲージ対称性によって質量を持つことが禁止されているゲージボゾンだけである。従って低エネルギーにおいては純粋な Yang-Mills 理論が実現されると期待される。

このような $\mathbf{S}^1$ コンパクト化を用いた非超対称ゲージ理論の構成は有限温度の場合とよく似ているが、コンパクト化を行う方向が違うことに気をつけなければならない。$3+1$ 次元（空間 3 次元、時間 1 次元）の場の理論の有限温度平衡系を時間方向のコンパクト化で表す場合、コンパクト化されずに残った 3 つの方向は全て空間方向であり、時間方向は平衡状態を扱っているために見えなくなっていると考えることができる。これに対して、上で説明したように空間方向のコンパクト化を行う場合には、コンパクト化されずに残った次元は $2+1$ であるから、次元の一つ低い場の理論を扱っていることになる。そのため、もし $3+1$ 次元の非超対称ゲージ理論を構成しようと思えば、これまで考えていた IIB 型超弦理論の D3-ブレーンのかわりに IIA 型超弦理論の D4-ブレーンを用いる必要がある。解析の手順はこれまでに説明してきたことと同じであるが、古典解の形（べきや数係数など）がやや異なる。そこでここではそのような違いの説明の手間を省くためにあえて $3+1$ 次元ではなく $2+1$ 次元の非超対称ゲージ理論の解析を例にとって説明する。

$2+1$ 次元の非超対称ゲージ理論を構成するには、10 次元時空の空間方向の一つを半径 $R_{\rm KK}$ でコンパクト化し、そこに D3-ブレーンを巻きつければよい。対応する古典解は (50) とほとんど同じであるが、時間方向と空間方向のうちの一つ（ここでは z 方向とする。）が入れ替わっている。

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + f(r)dz^2) + \frac{L^2}{r^2} f(r)^{-1} dr^2 + L^2 d\Omega_5^2 \tag{58}$$

座標 z は $z \sim z + 2\pi R_{\rm KK}$ のように周期的な座標である。関数 $f(r)$ は以前と同じように与えられる。

$$f(r) = 1 - \frac{\Delta^4}{r^4}, \quad \Delta = \frac{L^2}{2R_{\rm KK}} \tag{59}$$

今度はパラメータ Δ は温度ではなく、空間方向のコンパクト化の半径 $R_{\rm KK}$ と関係している。この関係は有限温度の場合と同様、解が $r = \Delta$ で滑らかであることを要請して得られる。

古典解 (58) は有限温度系を表す古典解 (50) とよく似ているが、$f(r)$ 因子を含む方向が異なるため $r = \Delta$ の面の解釈は全く異なる。有限温度系に対応した古典解 (50) では時間方向の計量に因子 $f(r)$ が付加されており、動径座標の最小値 $r = \Delta$ において $g_{tt} = 0$ になった。これは $r = \Delta$ がブラックホールの地平面であることを意味している。そしてこの地平面の存在のために Bekenstein-Hawking エントロピーの式 (52) を通してゲージ理論が持つ大きなエントロピー（$\sim N^2$）が得られた。一方ここで考えている古典解 (58) においては、$r = \Delta$ で 0 になるのは計量の g_{zz} 成分である。今度は g_{tt} はいたるところで 0 にならず、この古典解は地平面のない、いたるところ滑らかな曲がった時空を表している。従って今度は公式 (52) を用いると（地平面がどこにも無いので）エントロピーは 0 になる。ここでは $N \gg 1$ でのみ有効な重力の古典近似を用いているために N の小さいべきについての値を正しく得ることはできないが、少なくとも (4.2) で見たような N^2 のオーダーのエントロピーは無いことがわかる。これは対応する 3 次元 Yang-Mills 理論が閉じ込め相にあることを示唆している。

この理論が閉じ込め相にあることを示す別の証拠として、QCD 弦の張力について見てみよう。クォーク・反クォークポテンシャルの考察からわかったように、QCD 弦の張力は古典解の中心部における計量の振る舞いによって決まり (39) のように与えられる。計量 (58) を見れば、成分 g_{tt} や g_{xx} がいたるところで 0 にならないことがわかる。このことは QCD 弦の張力が 0 でない有限値をとることを意味しており、対応する場の理論で閉じ込めが起こっていることがここでも示唆される。

ここまでは、重力を用いた解析が、Yang-Mills 理論の閉じ込め相の性質を（定性的な議論しかしていないが）見事に再現しているように見える。しかし実際には詳しく見てみると、（少なくとも重力の古典近似のレベルでは）不要な Kaluza-Klein モードを排除することができず、純粋な Yang-Mills 理論を実現することができないことが知られている。ここで考えている古典解に対応する理論は、期待していたような純粋な Yang-Mills 理論ではなく、有限質量を持った場を無数に含むような理論になっている。

このように、超対称性を持たない理論を構成しようとした場合、不要な場を分離することが難しく、残念ながら今のところ純粋な $3+1$ 次元の QCD を与えるような重力の古典解は得られていない。そのため、いまのところ AdS/CFT を用いた非超対称ゲージ理論の応用は多くの不要な場の存在によってあまり影響を受けない定性的な、あるいはユニバーサルな性質についての解析に限られる。

6 おわりに

ここではいくつかの典型的な例を用いて、場の理論の情報をどのようにブレーンの古典解を用いて計算するかを説明した。ここでは触れなかった $\mathcal{N}=2$ や $\mathcal{N}=1$ の超対称理論の場合も含め、超対称性を持つゲージ理論の強結合領域と重力の古典解の間の対応については、いくつもの定量的なチェックがなされており、場合によっては数値の厳密な一致を見ることもできる。しかしながら超対称性の無い理論、特に $SU(3)$ の pure Yang-Mills 理論、あるいはそれにいくつかのクォークを加えた QCD については、そのような解析が行える段階には来ていない。本質的な問題点としては、重力理論の古典近似を用いることができる領域はゲージ群のサイズ N が大きい極限であり、$1/N$ 程度の誤差をどうしても避けることができないという点がある。このような問題点の解決には、曲がった時空上の弦理論の量子効果を取り入れる必要があると考えられるが、これは大変難しい問題である。それでも AdS/CFT の適用範囲は確実に広がってきており、これからもさらにゲージ理論と弦理論のつながりが密接になっていくことを期待したい。

参考文献

[1] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999)].

[2] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **428**, 105 (1998).

[3] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998).

[4] J. Polchinski, Phys. Rev. Lett. **75**, 4724 (1995).

[5] G.T. Horowitz and A. Strominger, Nucl. Phys. **B360** (1991) 197.

[6] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 505 (1998).

[7] J. M. Maldacena, Phys. Rev. Lett. **80**, 4859 (1998).

[8] J. K. Erickson, G. W. Semenoff and K. Zarembo, Nucl. Phys. B **582**, 155 (2000).

[9] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. A. Tseytlin, Nucl. Phys. B **534**, 202 (1998).